

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE CÁLCULO 3D POR  
ELEMENTOS DE ARESTA TETRAÉDRICOS E APLICAÇÃO A  
UMA MÁQUINA SÍNCRONA COM POLOS DO TIPO “GARRA”**

TESE SUBMETIDA A UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**JOSÉ AIRTON AZEVEDO DOS SANTOS**

**FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO 1999**

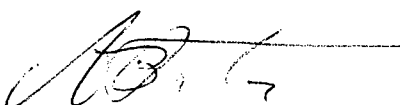
**Desenvolvimento de um Sistema 3D por Elementos de Aresta Tetraédricos e Aplicação a uma Máquina Síncrona com Pólos do Tipo “Garra”**

**José Aírton Azevedo dos Santos**

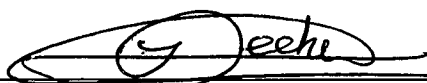
‘Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de

**Doutor em Engenharia Elétrica**  
**Área de concentração em Sistemas de Energia,**

e aprovada em sua forma final pelo curso de Pós-Graduação’

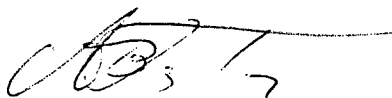


Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D’ETAT.  
Orientador

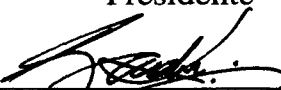


Prof. Ildemar Cassana Decker, Dr. Sc.  
Coordenador do Curso

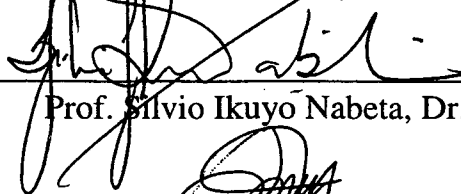
Banca Examinadora



Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. D’ETAT.  
Presidente



Prof. Nelson Sadowski, Dr. INPT.



Prof. Silvio Ikuyo Nabeta, Dr.



Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.



Prof. Patrick Dular, Ph.D.



Prof. João Carlos dos Santos Fagundes, Dr.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. João Pedro Assumpção Bastos, pela interessada e competente orientação.

Ao Prof. Nelson Sadowski pela grande participação no desenvolvimento deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora pelos comentários e sugestões.

Aos Professores e funcionários do GRUCAD, pela atenção e presteza dispensada.

A minha esposa pelo companheirismo, compreensão e constante apoio.

Ao Pinho, grande amigo e companheiro dos momentos difíceis.

Ao Guilherme, pelo companheirismo e amizade.

Ao Prof. Claudio Manoel da Cunha Duarte pela amizade e incentivo.

Aos amigos Jhoe, Hugo, Mauricio, Golberi, Claudia, Marcelo, Ana e Paulo.

À Universidade Federal de Santa Catarina e ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

Ao trabalhador brasileiro, pelo financiamento desta pesquisa.

## **RESUMO**

Neste trabalho é apresentado a metodologia utilizada no desenvolvimento de um sistema computacional com elementos de aresta tetraédricos.

Inicialmente são apresentados os conceitos básicos, os quais permitem o desenvolvimento de uma formulação matemática para simulação de dispositivos eletromagnéticos em três dimensões. Em seqüência, os elementos de aresta tetraédricos utilizados na discretização do domínio de estudo são apresentados. A seguir, é proposta uma técnica para promover a continuidade da corrente de magnetização, condição necessária para obtenção de convergência do sistema linear de equações resultantes. Esta técnica é baseada nos potenciais vetores elétrico e magnético com elementos de aresta e no potencial escalar elétrico com elementos nodais.

Posteriormente, as grandezas características do alternador síncrono com polos do tipo “garra” e alguns aspectos relativos a implementação dos programas computacionais são apresentados.

Finalmente, a validação dos procedimentos informáticos é feita através da comparação com resultados de ensaio relativos ao alternador síncrono com polos do tipo “garra”.



## **ABSTRACT**

The aim of this work is to present the methodology used for the development of one computational system based on tetrahedral edge elements.

At first, a presentation of the basic concepts that allows the development of mathematic formulations is made. Afterwards, tetrahedral edge elements used to divide the domain study is presented.

Then, a technique to establish the continuity of the magnetizing current, necessary condition to achieve the convergence of the linear equations system is proposed. This technique is based on magnetic and electric vector potential with edge elements and on electric scalar potential with nodal elements.

Afterwards, the characteristics of the synchronous generator with poles type “claw” and aspects related to the implementation of the computational programs are shown.

Finally, the validation of the computational system is made by comparing simulation with experimental results.

# SUMÁRIO

SIMBOLOGIA .....	vi
LISTA DE FIGURAS.....	ix
INTRODUÇÃO.....	xi
CAPÍTULO 1 - CONCEITOS BÁSICOS .....	1
1.1 - Introdução .....	1
1.2 - Equações fundamentais .....	1
1.3 - Condição de fronteira entre dois meios .....	3
1.4 - Potencial vetor .....	3
1.5 - Caso estático .....	4
1.5.1 - Formulação fraca .....	5
1.5.2 - Condições de contorno na fronteira do domínio .....	6
1.5.3 - Método de Galerkin.....	8
1.5.4 - Método dos elementos finitos.....	8
1.5.5 - Imãs permanentes .....	10
1.6 - Correntes induzidas - baixas frequências.....	11
1.7 - Os problemas não lineares .....	14
1.7.1 - Método de Newton - Raphson .....	15
1.7.2 - Aplicação do método de Newton - Raphson .....	16
1.8 - Conclusão.....	19
CAPÍTULO 2 - ELEMENTOS DE ARESTA.....	20
2.1 - Introdução .....	20
2.2 - Continuidade do potencial vetor.....	21
2.3 - Coordenadas homogêneas.....	21
2.4 - Funções de “forma” vetoriais.....	23
2.5 - Sistema matricial .....	27

2.5.1 - Termo $K_{ij}$ .....	27
2.5.2 - Termo $F_j$ .....	27
2.5.3 - Termo $G_j$ .....	28
2.5.4 - Termo $M_{ij}$ .....	28
2.6 - Conclusão.....	30
CAPÍTULO 3 - CONTINUIDADE DA DENSIDADE DE CORRENTE .....	31
3.1 - Introdução .....	31
3.2 - O método proposto (magnetostática).....	32
3.2.1 - Potencial vetor elétrico .....	34
3.2.2 - Potencial escalar elétrico .....	35
3.3 - O método de Fujiwara.....	38
3.4 - Conclusão.....	40
CAPÍTULO 4 - ALTERNADOR SÍNCRONO COM POLOS DO TIPO “GARRA”.....	41
4.1 - Introdução .....	41
4.2 - Geometria da máquina.....	41
4.3 - Grandezas características da máquina .....	42
4.3.1 - Fluxo e força eletromotriz .....	42
4.3.2 - Reatâncias síncronas.....	44
4.4 - Conclusão.....	46
CAPÍTULO 5 - ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....	47
5.1 - Introdução .....	47
5.2 - Elementos base .....	47
5.2.1 - Hexaedro.....	47
5.2.2 - Pentaedro .....	48
5.3 - Direções das funções de “forma” .....	50
5.4 - Estruturas dos programas.....	50

5.4.1 - Pré-processador.....	51
5.4.2 - Processador.....	51
5.4.3 - Pós-processador.....	51
5.4.4 - Fluxograma dos programas.....	52
5.5 - Estrutura de dados.....	53
5.5.1 - Estrutura de dados gerada pelo pré-processador.....	53
5.5.2 - Estrutura de dados gerada pelo processador.....	54
5.6 - Entrada de dados.....	56
5.7 - Conclusão.....	57
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS E COMPARAÇÕES.....	58
6.1 - Introdução.....	58
6.2 - Estrutura em forma de cubo.....	58
6.3 - Estrutura com imã.....	62
6.4 - Eletroímã.....	66
6.5 - Contator.....	72
6.6 - Bobina com forma circular.....	78
6.7 - Bobina com diferentes seções transversais.....	80
6.8 - Seção de um dispositivo eletromagnético.....	82
6.9 - Alternador síncrono.....	86
6.10 - Conclusões.....	91
CONCLUSÕES FINAIS.....	93
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	96
ANEXO.....	103

## SIMBOLOGIA

$\vec{A}$	- Potencial vetor magnético
$\vec{E}$	- Campo elétrico
$\vec{H}$	- Campo magnético
$\vec{B}$	- Indução magnética
$\vec{D}$	- Indução elétrica
$\vec{J}$	- Densidade superficial de corrente
$\rho$	- Densidade volumétrica de carga
$\varepsilon$	- Permissividade elétrica
$\mu$	- Permeabilidade magnética
$\sigma$	- Condutividade elétrica
$t$	- Tempo
$\vec{n}$	- Vetor normal a interface entre dois meios
$\Gamma$	- Fronteira do domínio de estudo
$\nu$	- Relutividade magnética
$\vec{r}$	- Resíduo
$\vec{v}$	- Função de teste vetorial
$H_0$	- Classe de função de teste vetorial
$\vec{W}$	- Função de forma vetorial

$K_{ij}$	- Matriz de contribuição local (potencial vetor magnético)
$F_j$	- Vetor relativo a densidade de corrente
$G_j$	- Vetor relativo aos ímãs permanentes
$\Omega$	- Domínio de estudo
$\psi$	- Potencial escalar
$M_{ij}$	- Matriz referente a correntes induzidas
$\vec{B}_n$	- Componente normal da indução magnética
$\vec{H}_t$	- Componente tangencial do campo magnético
$n$	- Dimensão do espaço
$L$	- Coordenada homogênea (função de forma nodal)
$V$	- Volume do tetraedro
$P$	- Ponto no baricentro do tetraedro
$\nabla$	- Operador nabla
$nedg$	- Número de aresta do elemento
$\vec{N}$	- Função de forma vetorial
$l$	- Distância entre dois pontos
$\Phi$	- Fluxo magnético
$n_e$	- Número de espiras

$S_e$	- Área da seção transversal
$\vec{n}_0$	- Vetor unitário na direção da corrente
$f$	- Frequência de operação
$X_d$	- Reatância síncrona segundo o eixo direto
$X_q$	- Reatância síncrona segundo o eixo em quadratura
$L_d$	- Indutância segundo o eixo direto
$L_q$	- Indutância segundo o eixo em quadratura
$\vec{T}$	- Potencial vetor elétrico
$nno$	- Número de nós do elemento
$V$	- Potencial escalar elétrico
$U_j$	- Vetor fonte (potencial vetor elétrico)
$C_{ij}$	- Matriz de contribuição local (potencial vetor elétrico)
$D_j$	- Vetor fonte ( densidade de corrente)
$S_{ij}$	- Matriz de contribuição local (potencial escalar elétrico)
$fem$	- Força eletromotriz

## LISTA DE FIGURAS

### Capítulo 1

1.1 - Representação de um problema tridimensional hipotético.....	4
1.2 - Parcela da fronteira com sistema local de coordenadas .....	6
1.3 - Malha de elementos finitos (2D) .....	9
1.4 - Representação de um problema com correntes induzidas.....	12

### Capítulo 2

2.1 - Tetraedro dividido em quatro tetraedro menores .....	22
2.2 - Elemento de aresta tetraédrico .....	26

### Capítulo 3

3.1 - Distribuição do vetor densidade de corrente no “canto” da bobina.....	32
3.2 - Problema tridimensional hipotético .....	32
3.3 - Diferença de potencial .....	36
3.4 - Bobina com núcleo de ar.....	38
3.5 - Um quarto da bobina com núcleo de ar .....	39

### Capítulo 4

4.1 - Alternador síncrono com polos do tipo “garra” .....	42
4.2 - Rotor do alternador síncrono .....	42
4.3 - Eixos direto e em quadratura .....	44
4.4 - Modelo para obtenção de $\phi_d$ .....	45
4.5 - Modelo para obtenção de $\phi_q$ .....	45

### Capítulo 5

5.1 - Primeira divisão - hexaedro .....	48
5.2 - Segunda divisão - hexaedro .....	48
5.3 - Primeira divisão - pentaedro .....	49
5.4 - Segunda divisão - pentaedro .....	49
5.5 - Elemento de referência .....	50
5.6 - Fluxograma.....	52
5.7 - Entrada em tensão .....	56
5.8 - Entrada com densidade de corrente.....	57

### Capítulo 6

6.1 - Estrutura em forma de cubo .....	59
6.2 - Malha FEET (135 elementos - 252 arestas - 64 nós) .....	59
6.3 - Malha FEECAD (27 elementos - 144 arestas - 64 nós) .....	60
6.4 - Malha EFCAD (9 elementos - 16 nós) .....	60
6.5 - Indução magnética EFCAD .....	61
6.6 - Indução magnética FEECAD.....	61



6.7 - Indução magnética FEET.....	62
6.8 - Estrutura com imã.....	63
6.9 - Malha FEET (6000 elementos - 8559 arestas - 1680 nós).....	63
6.10 - Malha FEECAD (1200 elementos - 4519 arestas -1680 nós).....	64
6.11 - Malha EFCAD (300 elementos - 336 nós).....	64
6.12 - Indução magnética FEET.....	65
6.13 - Indução magnética FEECAD.....	65
6.14 - Indução magnética EFCAD.....	66
6.15 (a) - Eletroímã.....	66
6.15 (b) - Curva $\vec{B}(\vec{H})$ para o ferro.....	67
6.16 - Malha EFCAD (77 elementos - 96 nós).....	68
6.17 - Malha FEECAD (300 elementos - 1244 arestas - 480 nós).....	68
6.18 - Malha FEET (1540 elementos - 2317 arestas - 480 nós).....	69
6.19 - Indução magnética EFCAD.....	69
6.20 - Indução magnética FEECAD.....	70
6.21 - Indução magnética FEET.....	70
6.22 - Contator.....	72
6.23 - Metade da estrutura do contator.....	75
6.24 - Malha FEET (6000 elementos - 8252 arestas - 1573 nós).....	76
6.25 - Densidade de corrente no enrolamento.....	77
6.26 - Correntes induzidas no anel condutor (FEET e FEECAD).....	77
6.27 - Densidade de corrente induzida.....	78
6.28 - Estrutura magnética com uma bobina de forma circular.....	79
6.29 - Valores de indução na linha entre os pontos A e B.....	79
6.30 - Estrutura magnética.....	80
6.31 - Vetores densidade de corrente.....	81
6.32 - Setor de um dispositivo eletromagnético.....	83
6.33 - Condições de fronteira na bobina.....	84
6.34 - Induções magnéticas na curva entre A e B.....	85
6.35 - Vetores densidade de corrente.....	85
6.36 - Distribuição do fluxo quando o rotor esta na posição de quadratura.....	86
6.37 - Malha (19530 elementos - 21000 incógnitas).....	86
6.38 - Vetores densidade de corrente.....	89
6.39 - Distribuição do fluxo segundo o eixo direto.....	90
6.40 - Distribuição da densidade de corrente na bobina do rotor.....	90

## Anexo

A1 - Subdivisão da malha em hexaedros e pentaedros.....	102
A2 - Elementos base subdivididos em tetraedros.....	103

## INTRODUÇÃO

Na década de 70 o método dos elementos finitos, que já vinha sendo utilizado em problemas de engenharia mecânica há muitos anos, começou a ser aplicado igualmente a problemas eletromagnéticos, permitindo assim que estruturas geometricamente mais complexas pudessem ser analisadas.

O método dos elementos finitos é uma técnica geral para solução de problemas de equações diferenciais com valores de contorno [3]. Este método vem sendo empregado no auxílio ao projeto dos mais variados tipos de dispositivos eletromagnéticos: máquinas elétricas rotativas de todas as faixas de potências, transformadores, reatores, equipamentos de alta tensão, disjuntores, dispositivos semicondutores, dentre outros.

O cálculo dos campos que, inicialmente, era feito em duas dimensões passou a ser feito também em três dimensões. Na realidade, a maior parte dos dispositivos utilizados em engenharia elétrica é tridimensional. Portanto o cálculo bidimensional é uma aproximação geométrica da situação real (na maior parte dos casos ela é uma boa aproximação, em outros, uma aproximação ruim).

O método dos elementos finitos apresenta bons resultados quando as incógnitas estão relacionadas com os nós dos elementos. Contudo, o cálculo do campo magnético (magnetostática) em três dimensões apresenta certas dificuldades como [9]: perda de precisão devido aos erros de cancelamento em regiões com altas permeabilidades (método  $\vec{H}_s - \phi$  - potencial escalar reduzido  $\phi$  em conjunto com o campo livre de divergência  $\vec{H}_s$ ) e erros de cancelamento em regiões ferromagnéticas (método  $\vec{T} - \Omega$  - potencial vetor elétrico  $\vec{T}$  em conjunto com o potencial escalar  $\Omega$ ). A análise de correntes induzidas e problemas de microondas podem apresentar soluções espúrias [13]. O potencial vetor  $\vec{A}$  não é muito utilizado em três dimensões. Isto se deve principalmente a presença de três componentes por nó ( $A_x$ ,  $A_y$  e  $A_z$ ), e as dificuldades

relacionadas na imposição de um calibre [13]. A unicidade da solução é geralmente obtida através do calibre de Coulomb. A utilização do calibre de Coulomb, juntamente com o potencial vetor magnético, leva a perdas de precisão [42]. Consequentemente, a utilização do potencial vetor magnético com elementos de aresta torna-se uma poderosa ferramenta.

Neste trabalho são utilizados elementos vetoriais, cujos graus de liberdade estão associados as arestas em vez dos nós dos elementos (elementos nodais). Por esta razão são também chamados de elementos de aresta. Embora este tipo de elemento tenha sido descrito por Whitney [27], há aproximadamente quarenta anos, seu uso e sua importância em eletromagnetismo foi descoberto na década passada. No início dos anos 80 Nedelec discutiu a construção dos elementos de aresta tetraédricos e hexaédricos [15]. Bossavit e Verité aplicaram elementos de aresta tetraédricos em problemas com correntes de Foucault [28]. Mur e Hoop consideraram o problema dos campos eletromagnéticos em regiões não homogêneas [17,25]. A aplicação de elementos de aresta hexaédricos no cálculo de correntes de Foucault foi considerado por Welij [24] e Kameari [23]. Barton e Cendes empregaram elementos de aresta tetraédricos para computação de campos magnéticos tridimensionais [26], enquanto Crowley desenvolveu elementos com arestas curvas (projeções covariantes) [22].

O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento de um sistema computacional com elementos de aresta tetraédricos utilizando a formulação potencial vetor magnético.

A formulação potencial vetor magnético, com elementos de aresta, é muito utilizada em eletromagnetismo devido a sua robustez. Contudo esta formulação apresenta dois problemas essenciais: (1) a unicidade do sistema e (2) a continuidade da corrente, condição física que deve ser respeitada para permitir convergência numérica [39].

Para assegurar a unicidade do potencial vetor com elementos de aresta freqüentemente é utilizado o calibre  $\vec{A} \cdot \vec{w} = 0$ . O vetor de campo  $\vec{w}$  pode ser determinado por uma árvore formada por uma coleção de arestas na malha de elementos finitos. Experiências numéricas têm mostrado que a utilização deste calibre nos leva a um sistema algébrico mal condicionado, e um alto número de iterações é requerido para chegar a solução. Contudo, a razão de convergência e a precisão dos resultados dependem da escolha da árvore [9].

A formulação magnetostática apresentada por Ren [39] demonstra que um calibre explícito não é necessário quando é utilizado um método iterativo. A convergência é possível somente quando a condição de compatibilidade entre ambos os lados do sistema é respeitada. Isto somente pode ser conseguido se o lado direito do sistema (densidade de corrente  $\vec{J}$ ) for livre de divergência ( $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ). Esta técnica é baseada na introdução do potencial vetor elétrico  $\vec{T}$  para representar a densidade de corrente  $\vec{J}$ .

A principal contribuição deste trabalho reside na variação desta técnica quando a bobina é alimentada em tensão, isto é, as tensões aplicadas nas bobinas são as fontes de excitação. A técnica proposta é baseada nos potenciais vetores elétrico e magnético com elementos de aresta e no potencial escalar elétrico com elementos nodais.

Recentemente (1998), Golovanov e Marèchal proporam um novo método baseado também numa variação da técnica apresentada por Ren. Neste método as bobinas não são discretizadas e o potencial vetor elétrico  $\vec{T}$  é obtido através da lei de Biot-Savart [42].

A validação dos procedimentos informáticos é feita através da comparação com resultados de ensaio num alternador síncrono com polos do tipo “garra”. Esta máquina justifica e necessita do cálculo tridimensional do campo. Isto se

deve principalmente a forma tridimensional de suas “garras”, e a disposição dos enrolamentos. Portanto, a utilização desta máquina elétrica evidencia a necessidade de programas como os desenvolvidos ao longo deste trabalho, devido a complexidade de sua estrutura e por tratar-se de um dispositivo magnético que não pode ser simulado satisfatoriamente através de uma aproximação bidimensional dos fenômenos.

O alternador síncrono com polos do tipo “garra” é muito utilizado como gerador elétrico em automóveis. Este tipo de alternador tem despertado o interesse de vários grupos de pesquisa. Abdelaziz utilizou circuitos elétricos equivalentes no estudo do alternador síncrono [29]. Barakat fez o estudo e a modelização do alternador utilizando as formulações potencial escalar total e reduzido com elementos nodais [30]. Henneberg e Kuppers fizeram uma otimização do alternador, com a introdução de ímãs permanentes, utilizando uma formulação escalar [31]. Block e Henneberg introduziram uma formulação para o cálculo das reatâncias  $X_d$  e  $X_q$  do alternador [32].

Neste trabalho utilizou-se elementos tetraédricos devido a sua flexibilidade na discretização de geometrias complexas.

No primeiro capítulo desta monografia serão abordados os conceitos básicos da formulação matemática de problemas estáticos e quase-estáticos pelo método de elementos finitos. No segundo capítulo, descreve-se os elementos de aresta tetraédricos utilizados neste trabalho, e no terceiro, o problema da continuidade da corrente de magnetização é tratado através de dois métodos.

No capítulo quatro, apresenta-se o alternador síncrono com polos do tipo “garra”, e no capítulo cinco descreve-se alguns aspectos relativos a implementação dos programas computacionais. Finalmente, no capítulo seis são apresentados os resultados obtidos através do pacote computacional desenvolvido neste trabalho.

# CAPÍTULO 1

## CONCEITOS BÁSICOS

### 1.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são abordados os conceitos básicos para a formulação matemática de problemas estáticos e quase-estáticos, pelo método de elementos finitos utilizando os elementos de aresta.

Inicialmente, são revisadas as equações fundamentais do eletromagnetismo. Em seguida, estuda-se as formulações matemática para os casos: estático, ímãs permanentes, correntes induzidas e problemas não lineares.

### 1.2 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

As equações fundamentais do eletromagnetismo são as *equações de Maxwell* [1], que estão representadas abaixo:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

onde  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ , e as outras grandezas são:

$\vec{D}$  - vetor indução elétrica ( $C/m^2$ );

$\vec{E}$  - vetor campo elétrico ( $V/m$ );

$\vec{B}$  - vetor indução magnética (T);

$\vec{H}$  - vetor campo magnético ( $A/m$ );

$\vec{J}$  - vetor densidade superficial de corrente ( $A/m^2$ );

$\rho$  - densidade volumétrica de carga ( $C/m^3$ );

$t$  - tempo (s).

A estas expressões são acrescentadas relações adicionais, denominadas relações constitutivas, as quais dependem dos meios onde existe os campos:

$$\vec{D} = \parallel \varepsilon \parallel \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \parallel \mu \parallel \vec{H} \quad (1.6)$$

$$\vec{J} = \parallel \sigma \parallel \vec{E} \quad (1.7)$$

onde:  $\parallel \varepsilon \parallel$  - tensor permissividade elétrica do meio ( $F/m$ );

$\parallel \mu \parallel$  - tensor permeabilidade magnética do meio ( $H/m$ );

$\parallel \sigma \parallel$  - tensor condutividade elétrica do meio ( $S/m$ ).

Nos casos em que os meios são isotrópicos, os tensores  $\parallel \varepsilon \parallel$ ,  $\parallel \mu \parallel$  e  $\parallel \sigma \parallel$  se reduzem aos escalares  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$ .

Na faixa de frequência com a qual se trabalha em eletrotécnica, a densidade de corrente de deslocamento  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  é muito menor que a densidade de corrente de condução  $\vec{J}$  [5]. Em vista disso, pode-se simplificar a equação (1.2)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad (1.8)$$

Aplicando o operador divergente a ambos os lados da equação (1.8), obtém-se a condição de continuidade da corrente.

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.9)$$

### 1.3 CONDIÇÃO DE FRONTEIRA ENTRE DOIS MEIOS

Nas fronteiras entre dois meios com características constitutivas diferentes, admitindo-se como hipótese que não existam cargas elétricas ou correntes superficiais nos limites entre os meios 1 e 2, verificam-se as seguintes condições de contorno [1,2]

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \vec{D}_2 \cdot \vec{n} \quad (1.10)$$

$$\vec{E}_1 \times \vec{n} = \vec{E}_2 \times \vec{n} \quad (1.11)$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \quad (1.12)$$

$$\vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{H}_2 \times \vec{n} \quad (1.13)$$

onde índices 1 e 2 representam os meios adjacentes e  $\vec{n}$  é o vetor normal à interface entre os dois meios.

As equações (1.10) e (1.12) estabelecem que a componente normal das induções magnética e elétrica são contínuas na interface entre dois meios diferentes. As equações (1.11) e (1.13) estabelecem que a componente tangencial dos campos elétrico e magnético são contínuas na interface entre os dois meios.

### 1.4 POTENCIAL VETOR

Neste trabalho é utilizado o potencial vetor magnético  $\vec{A}$  [1], tal que:



$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.14)$$

cuja validade é verificada substituindo (1.14) em (1.3).

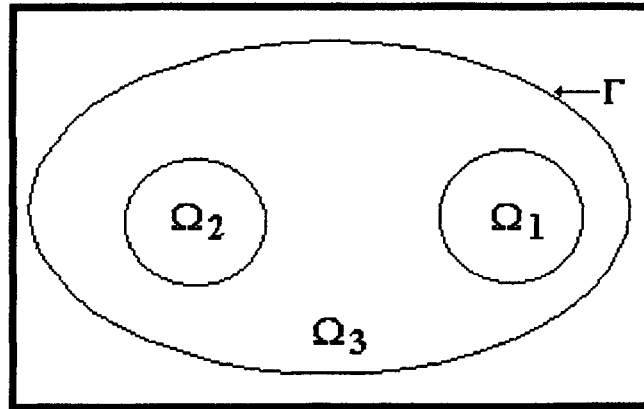
## 1.5 CASO ESTÁTICO

O problema a ser resolvido é representado esquematicamente pela Fig. (1.1). O domínio de estudo  $\Omega$ , com sua fronteira  $\Gamma$ , é dividido em três regiões:

$\Omega_1$  - região com corrente imposta;

$\Omega_2$  - região ferromagnética e;

$\Omega_3$  - região ar.



*Fig. 1.1 Representação de um problema tridimensional hipotético.*

Agora, substituindo (1.14) em (1.8), e considerando a relação constitutiva (1.6), obtém-se:

$$\nabla \times v(\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \quad (1.15)$$

onde  $\nu$  é a relutividade magnética tal que  $\nu = 1/\mu$ . A expressão (1.15) representa a *equação de Poisson* relativa ao potencial vetor magnético.

### 1.5.1 Formulação fraca

Devido à existência de descontinuidades nas interfaces entre os meios com propriedades constitutivas diferentes, não se pode utilizar o tratamento clássico de equações diferenciais, que exige que a solução satisfaça a equação em todos os pontos do domínio. Para superar esta dificuldade, reformula-se o problema de forma a admitir soluções fracas na solução e em suas derivadas [3]. A formulação fraca para o problema pode ser enunciada como segue: determina-se uma função  $\vec{A}$  tal que a equação diferencial (1.15), com apropriadas condições de contorno seja satisfeita em um sentido de "médias ponderadas".

A formulação fraca é obtida da definição de um residual  $\vec{r}$ , tal que [3,21]:

$$\vec{r} = \nabla \times \nu \nabla \times \vec{A} - \vec{J} \quad (1.16)$$

em cada domínio regular de  $\Omega$ .

Multiplica-se agora  $\vec{r}$  por uma função vetorial suficientemente regular, chamada função de teste  $\vec{v}$ , integra-se sob cada domínio no qual  $\vec{r} \cdot \vec{v}$  é regular e faz-se a média ponderada igual a zero.

$$\int_{\Omega} \vec{v} \cdot (\nabla \times \nu \nabla \times \vec{A}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{J} d\Omega = 0 \quad (1.17)$$

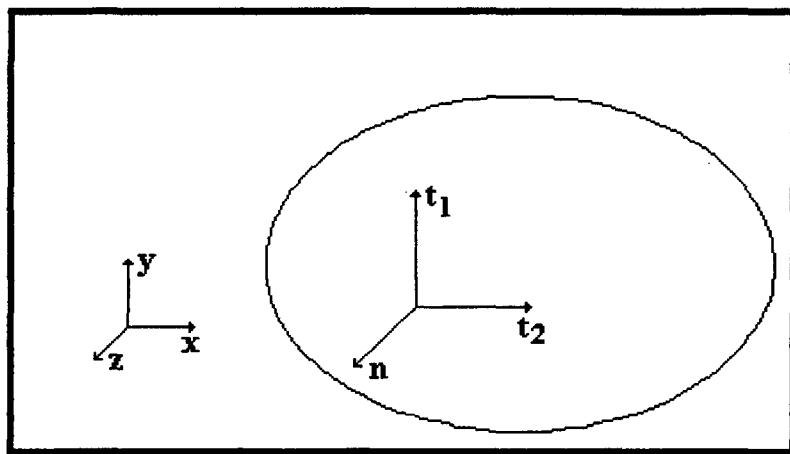
Aplicando o teorema de Green's no primeiro termo da equação (1.17), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nu \nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{v}) d\Omega - \int_{\Gamma} \vec{v} \times (\nu \nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (1.18)$$

### 1.5.2 Condições de contorno na fronteira do domínio

O segundo termo da equação (1.18) é relacionado à condição de fronteira. A fronteira do domínio de estudo  $\Gamma$  é dividida em duas partes:

1-Fronteira  $\Gamma_1$  - na qual a densidade de fluxo é paralela a fronteira. Considere a parcela de fronteira representada na Fig. (1.2).



*Fig. 1.2 Parcela da fronteira com sistema local de coordenadas.*

Seja  $\vec{n}$  o vetor unitário normal a fronteira e  $\vec{t}_1$  e  $\vec{t}_2$  dois vetores unitários tangenciais à fronteira, definidos de maneira que:

$$\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \vec{n} \quad (1.19)$$

Estes vetores definem um sistema de coordenadas ortogonal local  $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$ . O vetor  $\vec{A}$  pode ser referido a este sistema gerando:

$$\vec{A} = (A_{t_1}, A_{t_2}, A_n) \quad (1.20)$$

Tome-se agora o vetor  $\vec{B}$  neste sistema de coordenadas:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_n}{\partial t_2} - \frac{\partial A_{t_2}}{\partial n} \right) \vec{t}_1 + \left( \frac{\partial A_{t_1}}{\partial n} - \frac{\partial A_n}{\partial t_1} \right) \vec{t}_2 + \left( \frac{\partial A_{t_2}}{\partial t_1} - \frac{\partial A_{t_1}}{\partial t_2} \right) \vec{n} \quad (1.21)$$

Se especificarmos, por exemplo,  $A_{t_1} = 0$  e  $A_{t_2} = 0$  em  $\Gamma_1$ , então:

$$\frac{\partial A_{t_i}}{\partial t_j} = 0 \quad i, j = 1, 2 \text{ em } \Gamma_1 \quad (1.22)$$

Portanto:

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.23)$$

ou seja, a indução magnética  $\vec{B}$  é tangencial à fronteira onde se especificam as componentes tangenciais do potencial vetor  $\vec{A}$ . Portanto, o segundo termo da equação (1.18) torna-se:

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \times \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{v} \times \nu \vec{B} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (1.24)$$

2-Fronteira  $\Gamma_2 (\Gamma - \Gamma_1)$  - na qual a densidade de fluxo  $\vec{B}$  é perpendicular à fronteira.

Para satisfazer o segundo termo da equação (1.18) tem-se:

$$\int_{\Gamma} \vec{v} \times \nu \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \nu \nabla \times \vec{A} \times \vec{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{H} \times \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (1.25)$$

Como a função vetorial  $\vec{v}$  não é nula, tem-se:

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{H}_t \times \vec{n} + \vec{H}_n \times \vec{n} = 0 \quad (1.26)$$

onde os índices  $n$  e  $t$  indicam as direções normal e tangencial respectivamente. A expressão (1.26) mostra que  $\vec{H}_t = 0$ . Isto significa que  $\vec{H}$  é normal a  $\Gamma_2$ . Portanto, a equação (1.18) torna-se:

$$\int_{\Omega} (\nu \nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{J} d\Omega = 0 \quad (1.27)$$

### 1.5.3 Método de Galerkin

Na seção anterior foi obtida a formulação fraca para o problema, ou seja a equação (1.27) para qualquer  $\vec{v}$  em  $\mathbf{H}_0$ .  $\mathbf{H}_0$  é definido como uma classe de funções de teste vetoriais e contém somente as funções que se anulam na fronteira do domínio e cuja derivada tenha seu quadrado integrável [3,4,6]. Já a classe de funções admissíveis a qual pertence a solução  $\vec{A}$ , é composta por funções cuja primeira derivada tenha seu quadrado integrável. A solução  $\vec{A}$  e a função de teste  $\vec{v}$  são linearmente independentes e pertencem a um conjunto de dimensão infinita. Desta forma a procura da solução de (1.27) torna-se extremamente difícil.

O método de Galerkin consiste em procurar uma solução aproximada para (1.27) em uma classe de dimensão finita. Desta maneira, utiliza-se um número finito de  $n$  termos linearmente independentes, obtendo a aproximação  $\vec{A}_n$  de  $\vec{A}$ .

$$\vec{A}_n = \sum_{i=1}^n A_i \vec{W}_i \quad (1.28)$$

onde  $\vec{W}_i$  é a função de forma vetorial associada a aresta  $i$ ,  $A_i$  são as constantes desconhecidas e  $n$  é a dimensão do espaço. A função vetorial  $\vec{v}$  também pertence a um subconjunto de  $\mathbf{H}_0$  com dimensão  $n$ .

### 1.5.4 Método dos elementos finitos

O método de Galerkin fornece uma atraente estratégia para obtenção das soluções aproximadas do problema de contorno, mas não oferece uma maneira sistemática para construção das funções de forma  $\vec{W}_i$ . Esta situação torna-se crítica quando o domínio é bi ou tridimensional, com as funções  $\vec{W}_i$  tendo que satisfazer as condições de contorno em regiões com geometria complexa. Estas dificuldades podem ser resolvidas usando o método dos elementos finitos.

Na aplicação deste método, primeiramente o domínio é particionado ou discretizado em elementos finitos. Sobre cada elemento são identificados certos pontos chamados nós ou pontos nodais. O conjunto de elementos, nós e arestas que formam o domínio aproximado do problema é chamado malha de elementos finitos (Fig. (1.3)).

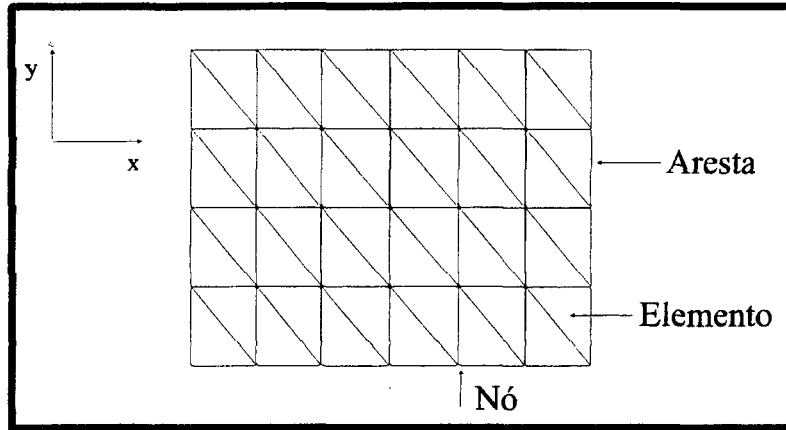


Fig. 1.3 Malha de elementos finitos (2D).

A aproximação de (1.27) por elementos finitos é

$$\int_{\Omega} (\nu \nabla \times \vec{A}_n) \cdot (\nabla \times \vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{J} d\Omega = 0 \quad (1.29)$$

onde a solução aproximada  $\vec{A}_n$  é dada por:

$$\vec{A}_n = \sum_{i=1}^{nedg} A_i \vec{W}_i \quad (1.30)$$

onde *nedg* é o número de arestas do elemento e  $A_i$  é a circulação de  $\vec{A}$  sobre a aresta  $i$ .

Substituindo (1.30) em (1.29), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{nedg} \left( \nu \nabla \times \vec{W}_i A_i \right) \cdot (\nabla \times \vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{J} d\Omega = 0 \quad (1.31)$$

Escolhendo a função de teste  $\vec{v}$  de modo que  $\vec{W}_j = \vec{v}$  e substituindo em (1.31), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{nedg} \left( \nu \nabla \times \vec{W}_i A_i \right) \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega = 0 \quad (1.32)$$

retirando o somatório para fora da integral a equação (1.32) transforma-se em:

$$\sum_{i=1}^{nedg} \left( \int_{\Omega} \nu \nabla \times \vec{W}_i A_i \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega \right) = \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega \quad (1.33)$$

o que representando em forma matricial, torna-se:

$$\sum_{i=1}^{nedg} K_{ij} A_i = F_j \quad j = 1, nedg \quad (1.34)$$

Aqui  $K_{ij}$  é a matriz de contribuição local, e  $F_j$  o vetor fonte, sendo ambos especificados abaixo:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \left( \nu \nabla \times \vec{W}_i \right) \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (1.35)$$

$$F_j = \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (1.36)$$

### 1.5.5 Imãs permanentes

Suponha que na região  $\Omega_1$  do domínio de estudo  $\Omega$  da Fig. (1.1) tem-se um imã permanente definido pela sua relutividade  $\nu$  e sua indução  $\vec{B}_r$ .

A equação para o imã é:

$$\vec{H} = \nu (\vec{B} - \vec{B}_r) \quad (1.37)$$

como

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad (1.38)$$

tem-se

$$\nabla \times \left( \nu (\vec{B} - \vec{B}_r) \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \times \nu \vec{B} - \nabla \times \nu \vec{B}_r = 0 \quad (1.39)$$

usando  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , a formulação fraca e o método de Galerkin, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{nedg} \int_{\Omega} \left( \nu \nabla \times \vec{W}_i A_i \right) \cdot \left( \nabla \times \vec{W}_j \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \nabla \times \nu \vec{B}_r \right) \cdot \vec{W}_j d\Omega \quad (1.40)$$

$$\sum_{i=1}^{nedg} \int_{\Omega} \left( \nu \nabla \times \vec{W}_i A_i \right) \cdot \left( \nabla \times \vec{W}_j \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left( \nabla \times \vec{W}_j \right) \cdot \nu \vec{B}_r d\Omega$$

o que representando na forma matricial, torna-se:

$$\sum_{i=1}^{nedg} K_{ij} A_i = G_j \quad j = 1, nedg \quad (1.41)$$

onde  $K_{ij}$  é a matriz de contribuição local (equação (1.35)), e  $G_j$  é o vetor fonte relativo aos ímãs. O vetor  $G_j$  é apresentado abaixo:

$$G_j = \int_{\Omega} \left( \nabla \times \vec{W}_j \right) \cdot \nu \vec{B}_r d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (1.42)$$

## 1.6 CORRENTES INDUZIDAS - BAIXAS FREQUÊNCIAS

Seja o problema a ser resolvido representado esquematicamente pela Fig. (1.4), onde a corrente é variável no tempo, e onde existem meios condutores. Tem-se a subregião  $\Omega_3$ , não susceptível a passagem de corrente ( $\sigma = 0$ ), e uma subregião  $\Omega_2$ , onde a condutividade é diferente de zero ( $\sigma \neq 0$ ), permitindo assim a criação de



correntes induzidas. Considera-se que a subregião  $\Omega_1$  é constituída de condutores bastante finos de maneira a que se possa supor que a corrente elétrica seja uniformemente distribuída sobre sua seção [35].

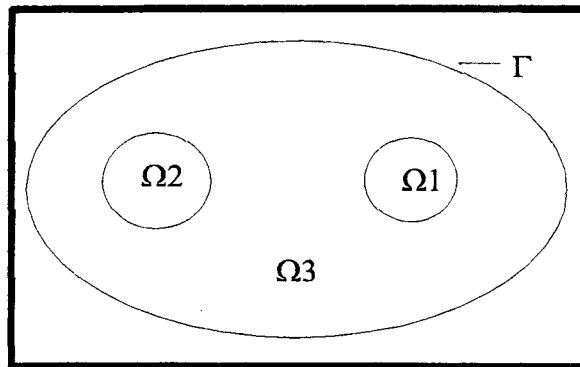


Fig. 1.4 Representação de um problema com correntes induzidas.

A densidade de corrente no domínio de estudo  $\Omega$  é dado por:

$$\vec{J} = \vec{J}_i + \vec{J}_e \quad (1.43)$$

onde:  $\vec{J}_e$  - densidade de corrente externa imposta na subregião  $\Omega_1$ ;

$\vec{J}_i$  - densidade de corrente induzida na subregião  $\Omega_2$ ;

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3.$$

Observa-se que  $\vec{J}_i = \sigma \vec{E}$ , onde  $\vec{E}$  é o campo elétrico induzido e

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{A})}{\partial t} \quad (1.44)$$

ou então

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \psi \right) \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \psi \quad (1.45)$$

assumindo que  $\vec{E}$  depende somente da variação temporal de  $\vec{A}$  e não depende do potencial escalar  $\psi$  [1], tem-se então:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.46)$$

e

$$\vec{J}_i = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.47)$$

Portanto tem-se

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.48)$$

ou

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_e \quad (1.49)$$

onde  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  pode ser tratado com a formulação em complexo para regime senoidal, linear e regime permanente. Contudo, neste trabalho, para poder-se tratar com problemas não lineares associado com alguma forma de excitação usa-se a derivada temporal de  $\vec{A}$  como:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\vec{A}_{k+1} - \vec{A}_k}{\Delta t} \quad (1.50)$$

onde  $\Delta t$  é o passo de tempo e  $\vec{A}_{k+1} - \vec{A}_k$  representa a variação de  $\vec{A}$  durante a passagem do passo  $k$  para o passo  $k + 1$ .

A equação (1.49) pode ser escrita como:

$$\nabla \times \left( \nu \nabla \times \vec{A}_{k+1} \right) + \sigma \frac{\vec{A}_{k+1}}{\Delta t} - \sigma \frac{\vec{A}_k}{\Delta t} - \vec{J}_e = 0 \quad (1.51)$$

Como o primeiro e o quarto termo da equação (1.51) já foram desenvolvidos anteriormente, passa-se agora ao desenvolvimento do segundo e terceiro termo desta equação.

Aplicando a formulação fraca e o método de Galerkin na equação (1.51), tem-se para o segundo termo desta equação

$$\int_{\Omega} \sigma \frac{\vec{A}_{k+1}}{\Delta t} \vec{W}_j d\Omega \quad (1.52)$$

onde  $\vec{A}_{k+1} = \sum_{i=1}^{nedg} A_i \vec{W}_i$ , e

$$\sum_{i=1}^{nedg} \int_{\Omega} \frac{\sigma}{\Delta t} \vec{W}_j \cdot \vec{W}_i A_i d\Omega \quad (1.53)$$

o que, representando-se em forma matricial torna-se:

$$\sum_{i=1}^{nedg} M_{ij} A_i \quad j = 1, nedg \quad (1.54)$$

onde  $M_{ij}$  é a matriz referente ao segundo termo da equação (1.51).

O terceiro termo é equivalente ao segundo termo, onde ao invés do potencial  $\vec{A}_{k+1}$ , tem-se o potencial  $\vec{A}_k$  relativo ao passo de tempo anterior, portanto conhecido na iteração  $k + 1$ . Esta matriz será multiplicada pelo vetor  $\vec{A}_k$ , resultando em um vetor, o qual será adicionado ao outro termo fonte (quarto termo da equação (1.51)).

## 1.7 OS PROBLEMAS NÃO LINEARES

Se, em geral, pode-se considerar que a permissividade  $\epsilon$  e a condutividade  $\sigma$  são constantes, o mesmo não acontece com a permeabilidade  $\mu$  ou a relutividade  $\nu$  dos materiais ferromagnéticos [1]. Estas são caracterizadas por uma

curva  $\vec{B}(\vec{H})$  e portanto para cada valor de  $\vec{H}$  (ou  $\vec{B}$ ) temos um valor diferente de  $\mu$  (ou  $\nu$ ).

Ao construirmos a matriz  $K_{ij}$  do sistema tem-se a necessidade de utilizar um valor de  $\nu$  para cada elemento  $i$ . Porém, como conhecer o valor de  $\nu$  se este depende do potencial e o potencial é a solução do sistema de equações construído com os valores de  $\nu$ ? Na verdade tem-se um sistema não linear de incógnitas que é imbricado e para solucionar este sistema deve-se estabelecer um processo iterativo [1].

### 1.7.1 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um método iterativo para solução de sistemas de equações não lineares [1,5].

Seja o sistema de equações:

$$Sx = b \quad (1.55)$$

onde  $S$  e  $b$  dependem do valor de  $x$ . Define-se o resíduo:

$$r = Sx + b \quad (1.56)$$

Supõe-se conhecida uma estimativa para  $x$ ,  $x^i$ . Com este valor, pode-se calcular  $S^i = S(x^i)$  e  $b^i = b(x^i)$ . Com isto, o resíduo  $r^i = r(x^i)$  é dado por:

$$r^i = S^i x^i - b^i \quad (1.57)$$

Deseja-se calcular uma aproximação  $x^{i+1}$  da solução, tal que:

$$r^{i+1} = r(x^{i+1}) = r(x^i + \Delta x) \approx 0 \quad (1.58)$$

O algoritmo do método de Newton-Raphson é obtido desenvolvendo este resíduo em série de Taylor em torno do ponto  $x^i$  [1,5]:

$$r^{i+1} = r(x^i) + \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \right] \Delta x = 0 \quad (1.59)$$

ou

$$\left[ \frac{\partial r}{\partial x} \right]^i \Delta x = -r^i \quad (1.60)$$

Define-se a matriz jacobiana:

$$J = \left[ \frac{\partial r}{\partial x} \right]^i = S^i + \left[ \frac{\partial S}{\partial x} \right]^i x^i - \left[ \frac{\partial b}{\partial x} \right]^i \quad (1.61)$$

Com isto, o sistema (1.60) torna-se:

$$J \Delta x = -r(x^i) \quad (1.62)$$

Resolvendo este sistema de equações (usando, por exemplo, o método de gradientes conjugados com pré-condicionamento), determina-se  $\Delta x$ . O valor de  $x^{i+1}$  pode, então, ser calculado:

$$x^{i+1} = x^i + \Delta x \quad (1.63)$$

Durante o processo de convergência, este vetor é usado para calcular os novos valores de  $J$  e  $r$  (equação (1.62)) e novos valores de  $\Delta x$ . O processo continua, até que a convergência seja alcançada.

### 1.7.2 Aplicação do método de Newton-Raphson

No problema magnetostático (seção 1.5), os dois sistemas de equações a serem resolvidos podem ser representados pela seguinte expressão:

$$K A = F + G \quad (1.64)$$

onde o termo geral da matriz  $K$  é dado por (equação 1.35):

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\nu \nabla \times \vec{W}_i) \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (1.65)$$

e o termo geral dos dois vetores fontes são (equações (1.36) e (1.42)):

$$F_j = \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (1.66)$$

e

$$G_j = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}_j) \cdot \nu \vec{B}_r d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (1.67)$$

Os termos  $F_j$  e  $G_j$  são independentes do potencial e  $\nu$  é considerado constante no imã (equação 1.67). Então o termo geral da matriz jacobiana é dado por (equação 1.61):

$$J_{ij} = K_{ij} + \sum_{m=1}^{nedg} \frac{\partial K_{im}}{\partial A_j} A_m \quad (1.68)$$

Porém o único termo de  $K_{im}$  que depende do potencial é a relutividade magnética. Portanto:

$$\frac{\partial K_{im}}{\partial A_j} = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}_i) \cdot (\nabla \times \vec{W}_m) \frac{\partial \nu}{\partial A_j} d\Omega \quad (1.69)$$

Mas,

$$\frac{\partial \nu}{\partial A_j} = \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \cdot \frac{\partial B^2}{\partial A_j} \quad (1.70)$$

onde

$$B^2 = \vec{B} \cdot \vec{B} = \left( \sum_{l=1}^{nedg} \nabla \times \vec{W}_l A_l \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^{nedg} \nabla \times \vec{W}_l A_l \right) \quad (1.71)$$

Portanto:

$$\frac{\partial B^2}{\partial A_j} = 2(\nabla \times \vec{W}_j) \cdot \left( \sum_{l=1}^{nedg} \nabla \times \vec{W}_l A_l \right) \quad (1.72)$$

Substituindo (1.72) em (1.70) e o resultado em (1.69) e (1.68), obtém-se:

$$\mathbf{J}_{ij} = K_{ij} + \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{nedg} (\nabla \times \vec{W}_i) \cdot (\nabla \times \vec{W}_m A_m) \frac{\partial v}{\partial B^2} \cdot 2 \left( \sum_{l=1}^{nedg} (\nabla \times \vec{W}_l A_l) \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) \right) d\Omega \quad (1.73)$$

ou

$$\mathbf{J}_{ij} = K_{ij} + \int_{\Omega} 2 \frac{\partial v}{\partial B^2} \left( \sum_{m=1}^{nedg} K_{im} A_m \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^{nedg} K_{jl} A_l \right) d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (1.74)$$

onde o termo  $\frac{\partial v}{\partial B^2}$  é obtido diretamente da curva  $\vec{B}(\vec{H})$  do material.

Quando é utilizada a formulação de correntes induzidas em baixas frequências o sistema a ser solucionado é o seguinte:

$$(K + M) A_{k+1} = F \quad (1.75)$$

onde  $k + 1$  é o passo de tempo atual, e o termo geral da matriz  $M$  é dado por (equação 1.53):

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\sigma}{\Delta t} \vec{W}_j \cdot \vec{W}_i d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (1.76)$$

O vetor  $F$  é:

$$F_j = \int_{\Omega} \frac{\sigma}{\Delta t} \vec{W}_i \cdot \vec{W}_j A_k d\Omega + \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J}_e d\Omega \quad (1.77)$$

onde  $k$  é o passo de tempo anterior (conhecido na iteração  $k + 1$ ). Como as duas integrais da equação (1.77) são independentes de  $A_{k+1}$ , não são consideradas no jacobiano. Portanto o termo geral da matriz jacobiana, torna-se:

$$\mathbf{J}_{ij} = K_{ij} + M_{ij} + \sum_{m=1}^{nedg} \frac{\partial (K_{im} + M_{im})}{\partial A_j} A_m \quad (1.78)$$

onde

$$\frac{\partial(K_{im} + M_{im})}{\partial A_j} = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}_i) \cdot (\nabla \times \vec{W}_m) \frac{\partial v}{\partial A_j} d\Omega \quad (1.79)$$

A equação (1.79) já foi desenvolvida anteriormente. Portanto a matriz jacobiana dada na equação (1.78), transforma-se em:

$$J_{ij} = K_{ij} + M_{ij} + \int_{\Omega} 2 \frac{\partial v}{\partial B^2} \left( \sum_{m=1}^{nedg} K_{im} A_m \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^{nedg} K_{jl} A_l \right) d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (1.80)$$

## 1.8 CONCLUSÃO

Neste capítulo partiu-se dos conceitos básicos para em seguida introduzir os métodos de Galerkin e elementos finitos. Mostrou-se como pode ser obtida a forma fraca e como esta pode ser resolvida através do método dos elementos finitos. As formulações para problemas estáticos e quase-estáticos, através do método dos elementos finitos, foram apresentadas. Descreveu-se também a formulação de Newton-Raphson para problemas não lineares.

No próximo capítulo serão apresentados os elementos de aresta tetraédricos utilizados na discretização do domínio de estudo.



## CAPÍTULO 2

### ELEMENTOS DE ARESTA

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Para solução de problemas magnetostáticos tridimensionais, existem diferentes formulações empregando o método dos elementos finitos [6,9,13], cada uma utilizando uma determinada variável dependente (potencial vetor, potencial escalar). A maioria destas formulações utiliza elementos finitos tradicionais, que são os elementos nodais, e apresenta limitações quanto a, por exemplo: número de incógnitas, caso do método do potencial vetor magnético; perda de precisão no ferro, caso do método do potencial escalar reduzido, etc. A utilização de elementos nodais em aplicações de altas frequências têm gerado soluções que não correspondem à realidade física (modos espúrios) [19].

Uma alternativa que vem sendo adotada com muito sucesso quando se trabalha com variáveis vetoriais no método de elementos finitos é o uso de elementos de aresta. Os elementos de aresta se baseiam em funções de forma vetoriais, têm uma incógnita por aresta (menos requisitos de memória que os elementos nodais), e são livres dos modos espúrios [6,7,8,10,11,12,18].

A aproximação do potencial vetor magnético no interior de um elemento de aresta tetraédrico, se dá através da seguinte expressão:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^6 A_i \vec{W}_i \quad (2.1)$$

onde  $A_i$  é a circulação do potencial vetor sobre a aresta  $i$ , e  $\vec{W}_i$  é um vetor que possui sua projeção constante sobre a aresta  $i$  [36].

## 2.2 CONTINUIDADE DO POTENCIAL VETOR

Suponha que dois tetraedros tenham uma aresta em comum, sendo  $i$  o número da aresta no tetraedro  $K$ , e  $j$  no tetraedro  $L$ . O termo  $A_i^K \vec{W}_i$  do potencial vetor em  $K$  (tangente a aresta  $i$ ) pode ser feita igual ao termo  $A_j^L \vec{W}_j$  em  $L$  (tangente a aresta  $j$ ), simplesmente impondo [7]:

$$A_i^K \vec{W}_i = \pm A_j^L \vec{W}_j \quad (2.2)$$

onde o sinal  $\pm$  é devido a direção da função vetorial  $\vec{W}_i$ , que pode ser oposta a direção da função  $\vec{W}_j$ . Aplicando a equação (2.2) através de toda a malha de tetraedros tem-se uma incógnita por aresta, e o potencial torna-se tangencialmente contínuo através de todas as arestas. De fato, também o potencial é contínuo através de todas as faces [9]:

## 2.3 COORDENADAS HOMOGÊNEAS

As coordenadas homogêneas tridimensionais são definidas apartir da subdivisão de um tetraedro em quatro tetraedros menores (Fig. 2.1). Considere que  $P$  seja um ponto no interior de um tetraedro que tem como coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ . Suponha que os volumes  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  e  $V_4$  dos tetraedros menores, é formado por três dos quatro vértices originais  $(x_i, y_i, z_i)$  do tetraedro maior e o ponto  $P$ . Então as coordenadas homogêneas  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  de  $P$  são definidas por:

$$L_1 = \frac{V_1}{V} \quad L_2 = \frac{V_2}{V} \quad L_3 = \frac{V_3}{V} \quad L_4 = \frac{V_4}{V} \quad (2.3)$$

onde  $V$  é o volume total do tetraedro dado por:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

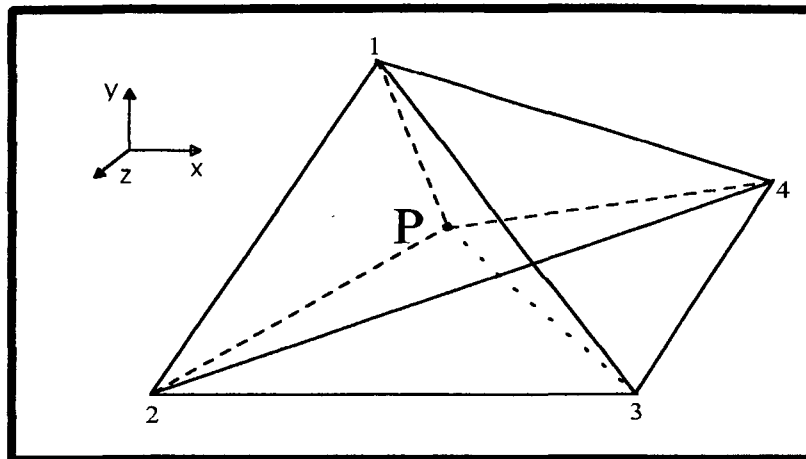


Fig. 2.1 Tetraedro dividido em quatro tetraedros menores.

As quatro coordenadas satisfazem a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^4 L_i = 1 \quad (2.5)$$

Nota-se que:

$$V_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

e

$$V_2 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

com expressões similares para  $V_3$  e  $V_4$ . Contudo, é visto ser possível escrever a relação

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad i = 1, 4 \quad (2.8)$$

onde

$$L_1 = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 z}{6V} \quad (2.9)$$

e

$$a_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.10a)$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.10b)$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \quad (2.10c)$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.10d)$$

Os outros termos, para  $i = 2, 3, 4$  são obtidos através de permutações cíclicas dos índices nas expressões (2.10a,b,c,d). Portanto,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  são definidos explicitamente em termos das coordenadas dos vértices do tetraedro.

## 2.4 FUNÇÕES DE FORMA VETORIAIS

Considerando-se a seguinte função vetorial [6,15,16,18,21]

$$\vec{N}_{ij} = L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i \quad (2.11)$$

onde  $L_i$  e  $L_j$  são as coordenadas homogêneas. O divergente e o rotacional desta função

vetorial são respectivamente:

a-  $\nabla \cdot \vec{N}_{ij}$

$$\nabla \cdot \vec{N}_{ij} = \nabla \cdot L_i \nabla L_j - \nabla \cdot L_j \nabla L_i \quad (2.12)$$

aplicando a formula  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \vec{Z}) = \nabla \mathbf{u} \cdot \vec{Z} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \vec{Z})$  na equação (2.12), obtém-se:

$$\nabla \cdot \vec{N}_{ij} = \nabla L_i \cdot \nabla L_j + L_i (\nabla \cdot \nabla L_j) - \nabla L_j \cdot \nabla L_i - L_j (\nabla \cdot \nabla L_i) = 0 \quad (2.13)$$

b-  $\nabla \times \vec{N}_{ij}$

$$\nabla \times \vec{N}_{ij} = \nabla \times L_i \nabla L_j - \nabla \times L_j \nabla L_i \quad (2.14)$$

utilizando  $\nabla \times (\mathbf{u} \vec{Z}) = (\nabla \mathbf{u}) \times \vec{Z} + \mathbf{u} (\nabla \times \vec{Z})$  em (2.14)

$$\nabla \times \vec{N}_{ij} = \nabla L_i \times \nabla L_j + L_i (\nabla \times \nabla L_j) - \nabla L_j \times \nabla L_i - L_j (\nabla \times \nabla L_i) \quad (2.15)$$

como  $-\nabla L_j \times \nabla L_i = \nabla L_i \times \nabla L_j$ , tem-se:

$$\nabla \times \vec{N}_{ij} = \nabla L_i \times \nabla L_j + \nabla L_i \times \nabla L_j = 2 \nabla L_i \times \nabla L_j \quad (2.16)$$

Considere como exemplo a aresta (1,2) (Fig. 2.2), onde  $\vec{e}_1$  é um vetor unitário apontando do nó 1 para o nó 2. Sendo  $L_1$  uma função linear que varia de *um* para o nó 1 até *zero* para o nó 2, e  $L_2$  uma função linear que varia de *um* para o nó 2 até *zero* para o nó 1, tem-se:

$$\vec{e}_1 \cdot \nabla L_1 = -\frac{1}{l_1} \quad (2.17)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \nabla L_2 = \frac{1}{l_1} \quad (2.18)$$

onde  $l_1$  é a distância entre os nós 1 e 2, e

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{N}_{12} = \vec{e}_1 \cdot (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) = \frac{L_1 + L_2}{l_1} = \frac{1}{l_1} \quad (2.19)$$

onde  $L_1 + L_2 = 1$  em qualquer ponto da aresta. Por exemplo, no centro da aresta tem-se  $1/2 + 1/2 = 1$ . Portanto,  $\vec{N}_{12}$  tem uma componente tangencial constante ao longo da aresta (1,2). As funções  $L_1$  e  $L_2$  são nulas nas arestas  $((2,3),(2,4)e(3,4))$  e  $((1,3),(1,4)e(3,4))$  respectivamente. A função vetorial  $\vec{N}_{12}$  não tem componente tangencial ao longo destas cinco arestas. As funções  $L_1$  e  $L_2$  também desaparecem nas faces do elemento definidas por (2,3,4) e (1,3,4) respectivamente. A função  $\vec{N}_{12}$  não tem componente tangencial nestas faces, sua componente tangencial somente aparece nas faces do elemento que contém a aresta (1,2), que são as faces (1,2,3) e (1,2,4). Definindo o segmento de aresta (1,2) como aresta 1, tem-se:

$$\vec{W}_1 = \vec{N}_{12} l_1 = (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) l_1 \quad (2.20)$$

onde  $l_1$  é incluído para normalizar  $\vec{W}_1$  [9]. Similarmente, as funções vetoriais para as outras cinco arestas são obtidas por (Fig. (2.2)):

$$\vec{W}_i = \vec{N}_{i_1 i_2} l_i = (L_{i_1} \nabla L_{i_2} - L_{i_2} \nabla L_{i_1}) l_i \quad (2.21)$$

onde os números das arestas associadas aos nós  $i_1$  e  $i_2$  são definidos na Tabela (2.1). Portanto, obtém-se um conjunto de funções vetoriais  $\vec{W}_i$ , de forma que:

$$\begin{cases} \vec{W}_i = 1 & \text{para aresta } i \\ \vec{W}_i = 0 & \text{para as outras arestas} \end{cases}$$

Conclui-se então, que as funções vetoriais  $\vec{W}_i$  possuem todas propriedades necessárias para serem consideradas funções de forma vetoriais para o elemento.

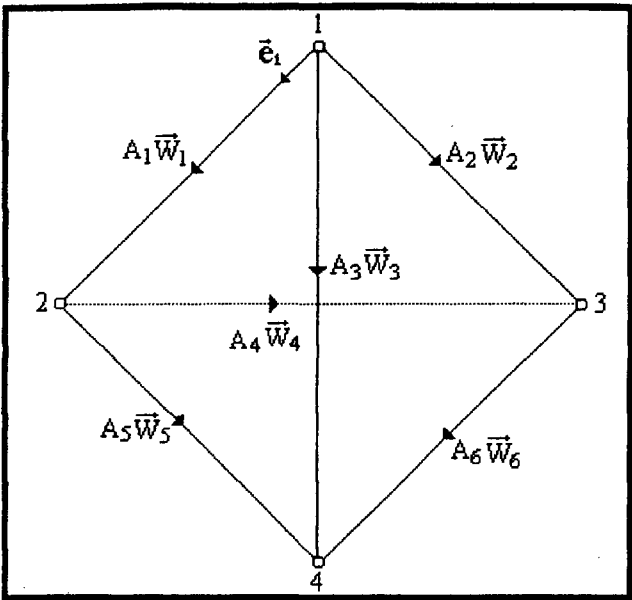


Fig. 2.2 Elemento de aresta tetraédrico.

Aresta $i$	Nó ( $i_1$ ou $j_1$ )	Nó ( $i_2$ ou $j_2$ )
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	2	4
6	3	4

Tabela 2.1 - Arestas associadas ao nós.

## 2.5 SISTEMA MATRICIAL

### 2.5.1 Termo $K_{ij}$

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (\nu \nabla \times \vec{W}_i) \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (2.22)$$

O rotacional da função de forma vetorial é dado por (equação 2.16):

$$\nabla \times \vec{W}_i = 2l_i \nabla L_{i_1} \times \nabla L_{i_2} \quad (2.23)$$

onde  $L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}$ , e

$$\nabla \times \vec{W}_i = \frac{2l_i}{(6V)^2} \left( (c_{i_1} d_{i_2} - d_{i_1} c_{i_2}) \vec{i} + (d_{i_1} b_{i_2} - b_{i_1} d_{i_2}) \vec{j} + (b_{i_1} c_{i_2} - c_{i_1} b_{i_2}) \vec{k} \right) \quad (2.24)$$

onde  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  foram definidos na seção (2.3). Substituindo (2.24) em (2.22), obtém-se:

$$K_{ij} = \frac{4l_i l_j V}{\mu(6V)^4} \left( (c_{i_1} d_{i_2} - d_{i_1} c_{i_2}) * (c_{j_1} d_{j_2} - d_{j_1} c_{j_2}) + (d_{i_1} b_{i_2} - b_{i_1} d_{i_2}) * (d_{j_1} b_{j_2} - b_{j_1} d_{j_2}) + (b_{i_1} c_{i_2} - c_{i_1} b_{i_2}) * (b_{j_1} c_{j_2} - c_{j_1} b_{j_2}) \right) \quad i, j = 1, 6 \quad (2.25)$$

onde os nós referentes aos índices  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $j_1$  e  $j_2$  foram apresentados na Tabela 2.1.

### 2.5.2 Termo $F_j$

$$F_j = \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (2.26)$$

ou

$$F_j = \vec{J} \cdot \left( \nabla L_{j_2} \int_{\Omega} L_{j_1} d\Omega - \nabla L_{j_1} \int_{\Omega} L_{j_2} d\Omega \right) \quad (2.27)$$



Aplicando a formula de integração dada abaixo

$$\int_{\Omega} (L_1)^k (L_2)^l (L_3)^m (L_4)^n d\Omega = \frac{(k! l! m! n!) 6V}{(k+l+m+n+3)!} \quad (2.28)$$

na equação (2.27), tem-se:

$$F_j = \frac{l_j}{24} \left( J_x(b_{i_2} - b_{i_1}) + J_y(c_{i_2} - c_{i_1}) + J_z(d_{i_2} - d_{i_1}) \right) \quad j = 1,6 \quad (2.29)$$

onde  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$  são as componentes da densidade de corrente  $\vec{J}$ .

### 2.5.3 Termo $G_j$

$$G_j = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{W}_j) \cdot \frac{\vec{B}_r}{\mu} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (2.30)$$

onde o termo  $(\nabla \times \vec{W}_j)$  foi apresentado na equação (2.24). Portanto,

$$G_j = \frac{2l_j V}{\mu(6V)^2} \left( B_x(c_{j_1} d_{j_2} - d_{j_1} c_{j_2}) + B_y(d_{j_1} b_{j_2} - b_{j_1} d_{j_2}) + B_z(b_{j_1} c_{j_2} - c_{j_1} b_{j_2}) \right) \quad j = 1,6 \quad (2.31)$$

onde  $B_x$ ,  $B_y$  e  $B_z$  são as componentes da indução magnética remanente  $\vec{B}_r$ .

### 2.5.4 Termo $M_{ij}$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\sigma}{\Delta t} \vec{W}_j \cdot \vec{W}_i d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (2.32)$$

ou

$$M_{ij} = \frac{l_i l_j \sigma}{\Delta t (6V)^2} \int_{\Omega} (L_{i_1} L_{i_2} m_{i_2 j_2} - L_{i_1} L_{j_2} m_{i_2 j_1} - L_{i_2} L_{j_1} m_{i_1 j_2} + L_{i_2} L_{j_2} m_{i_1 j_1}) d\Omega \quad (2.33)$$

onde  $m_{ij} = b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j$ . Utilizando a equação (2.28) em (2.33), obtém-se:

$$M_{11} = \frac{\sigma l_1^2}{360 \Delta t V} (m_{22} - m_{12} + m_{11}) \quad (2.34)$$

$$M_{12} = \frac{\sigma l_1 l_2}{720 \Delta t V} (2m_{23} - m_{21} - m_{13} + m_{11}) \quad (2.35)$$

$$M_{13} = \frac{\sigma l_1 l_3}{720 \Delta t V} (2m_{24} - m_{21} - m_{14} + m_{11}) \quad (2.36)$$

$$M_{14} = \frac{\sigma l_1 l_4}{720 \Delta t V} (m_{23} - m_{22} - 2m_{13} + m_{12}) \quad (2.37)$$

$$M_{15} = \frac{\sigma l_1 l_5}{720 \Delta t V} (m_{22} - m_{24} - m_{12} + 2m_{14}) \quad (2.38)$$

$$M_{16} = \frac{\sigma l_1 l_6}{720 \Delta t V} (m_{24} - m_{23} - m_{14} + m_{13}) \quad (2.39)$$

$$M_{22} = \frac{\sigma l_2^2}{360 \Delta t V} (m_{33} - m_{13} + m_{11}) \quad (2.40)$$

$$M_{23} = \frac{\sigma l_2 l_3}{720 \Delta t V} (2m_{24} - m_{13} - m_{14} + m_{11}) \quad (2.41)$$

$$M_{24} = \frac{\sigma l_2 l_4}{720 \Delta t V} (m_{33} - m_{23} - m_{13} + m_{12}) \quad (2.42)$$

$$M_{25} = \frac{\sigma l_2 l_5}{720 \Delta t V} (m_{23} - m_{34} - m_{12} + m_{14}) \quad (2.43)$$

$$M_{26} = \frac{\sigma l_2 l_6}{720 \Delta t V} (m_{24} - m_{33} - 2m_{14} + m_{34}) \quad (2.44)$$

$$M_{33} = \frac{\sigma l_3^2}{360 \Delta t V} (m_{44} - m_{14} + m_{11}) \quad (2.45)$$

$$M_{34} = \frac{\sigma l_3 l_4}{720 \Delta t V} (m_{34} - m_{24} - m_{13} + m_{12}) \quad (2.46)$$

$$M_{35} = \frac{\sigma l_3 l_5}{720 \Delta t V} (m_{24} - m_{44} - 2m_{12} + m_{14}) \quad (2.47)$$

$$M_{36} = \frac{\sigma l_3 l_6}{720 \Delta t V} (m_{44} - m_{34} - m_{14} + 2m_{13}) \quad (2.48)$$

$$M_{44} = \frac{\sigma l_4^2}{360 \Delta t V} (m_{33} - m_{23} + m_{22}) \quad (2.49)$$

$$M_{45} = \frac{\sigma l_4 l_5}{720 \Delta t V} (m_{23} - 2m_{34} - m_{22} + m_{24}) \quad (2.50)$$

$$M_{46} = \frac{\sigma l_4 l_6}{720 \Delta t V} (m_{34} - m_{33} - 2m_{24} + m_{23}) \quad (2.51)$$

$$M_{55} = \frac{\sigma l_5^2}{360 \Delta t V} (m_{22} - m_{24} + m_{44}) \quad (2.52)$$

$$M_{56} = \frac{\sigma l_5 l_6}{720 \Delta t V} (m_{24} - 2m_{23} - m_{44} + m_{34}) \quad (2.53)$$

$$M_{66} = \frac{\sigma l_6^2}{360 \Delta t V} (m_{44} - m_{34} + m_{33}) \quad (2.54)$$

## 2.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentou-se os elementos de aresta tetraédricos usados na discretização do domínio de estudo com a formulação potencial vetor. Através da utilização destes elementos evitam-se certas dificuldades como perdas de precisão devido aos erros de cancelamento em regiões ferromagnéticas, modos espúrios, dentre outras. Mostrou-se também as funções de forma vetoriais e o sistema matricial implementados no sistema computacional desenvolvido.

No próximo capítulo, dois métodos utilizados neste trabalho para promover a continuidade da corrente de magnetização serão apresentados. Será detalhado em especial o método proposto neste trabalho, o qual é baseado no acoplamento entre elementos nodais e de aresta.

## CAPÍTULO 3

### CONTINUIDADE DA DENSIDADE DE CORRENTE

#### 3.1 INTRODUÇÃO

A característica de convergência da formulação potencial vetor magnético é muito influenciada pela discretização do termo fonte (densidade de corrente  $\vec{J}$ ). Para obter-se convergência do sistema através do método iterativo (ICCG - Incomplet Cholesky Conjugated Gradients), o termo fonte têm que ser livre de divergência ( $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ) [34,37,38].

A principal contribuição deste trabalho reside na introdução de um método para alimentação em tensão [44], isto é, as tensões aplicadas nas bobinas são as fontes de excitação. Sua aplicação conduz a uma distribuição consistente do vetor densidade de corrente na bobina ( $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ), condição necessária para obter-se convergência numérica.

A condição de calibre é desnecessária neste método, somente se a condição de continuidade da corrente for satisfeita. Isto pode ser conseguido através da introdução do potencial vetor elétrico  $\vec{T}$  para representar a densidade de corrente  $\vec{J}$ . O potencial  $\vec{T}$  não é único mas, se a condição de continuidade for satisfeita, o sistema converge e assegura  $\vec{J} = \nabla \times \vec{T}$ .

Além da método proposto neste trabalho foi também implementado, em elementos tetraédricos, o método originalmente desenvolvido por Fujiwara et al [34,37,38] para elementos hexaédricos. A continuidade da corrente de magnetização é obtida neste método através de uma distribuição consistente do vetor densidade de corrente no “canto” da bobina (Fig. 3.1 ). Esta distribuição é conseguida através de duas equações que serão apresentadas posteriormente.

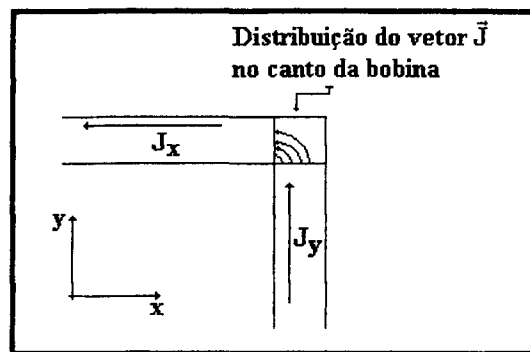


Fig. 3.1 Distribuição do vetor densidade de corrente no “canto” da bobina.

### 3.2 O MÉTODO PROPOSTO (MAGNETOSTÁTICA)

Considerando-se que não existam correntes de Foucault no domínio de estudo  $\Omega$  (Fig. 3.2), o potencial vetor magnético deve satisfazer a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{nedg} \left( \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_i \cdot A_i \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega \right) = \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (3.1)$$

onde o domínio de estudo  $\Omega$ , com sua fronteira  $\Gamma$ , é dividido em três regiões: a região  $\Omega_1$  com corrente imposta; a região ferromagnética  $\Omega_2$  e uma região ar ( $\Omega_3$ ).

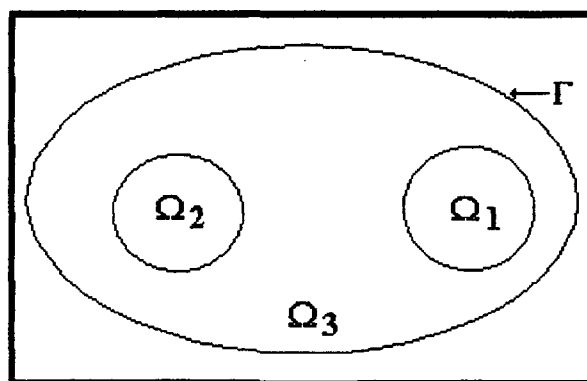


Fig. 3.2 Problema tridimensional hipotético.

Como comentado anteriormente, o método iterativo (ICCG) fica inapto para resolver o sistema matricial se não é satisfeita seguinte condição de continuidade (equação 1.9) [34,37,38]:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.2)$$

Para assegurar  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , utiliza-se o potencial vetor elétrico  $\vec{T}$  como [39,40]:

$$\nabla \times \vec{T} = \vec{J} \quad (3.3)$$

e o lado direito da equação (3.1) transforma-se em:

$$\int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot \nabla \times \vec{T} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_j \cdot \vec{T} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (3.4)$$

Portanto a equação magnetostática a ser resolvida no domínio de estudo  $\Omega$ , torna-se:

$$\sum_{i=1}^{nedg} \left( \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_i \cdot A_i \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega \right) = \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_j \cdot \vec{T} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (3.5)$$

o que representando em forma matricial, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{nedg} K_{ij} A_i = U_j \quad j = 1, nedg \quad (3.6)$$

onde a matriz  $K_{ij}$  foi apresentada nas equações (1.35 e 2.25), e o vetor  $U_j$  relativo ao termo fonte é dado por:

$$U_j = \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_j \cdot \vec{T} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (3.7)$$

ou

$$U_j = \frac{2I_j V}{(6V)^2} \left( T_x(c_{j_1} d_{j_2} - d_{j_1} c_{j_2}) + T_y(d_{j_1} b_{j_2} - b_{j_1} d_{j_2}) + T_z(b_{j_1} c_{j_2} - c_{j_1} b_{j_2}) \right) \quad j = 1, 6 \quad (3.8)$$

onde  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_z$  são as componentes do potencial vetor elétrico  $\vec{T}$ , e os termos  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$ ,  $l_j$  e  $V$  foram apresentados no capítulo anterior. Os nós referentes aos índices  $j_1$  e  $j_2$  foram apresentados na Tabela 2.1.

### 3.2.1 Potencial vetor elétrico

Através da equação (3.5) obtém-se uma boa convergência do sistema, mas necessita-se o conhecimento do potencial vetor elétrico  $\vec{T}$ . O potencial vetor elétrico no domínio de estudo simplesmente conexo  $\Omega$  é obtido da seguinte expressão (equação 3.3):

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{T} \quad (3.9)$$

Aplicando o operador rotacional nos dois lados da equação (3.9), tem-se:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{T} = \nabla \times \vec{J} \quad (3.10)$$

Utilizando a formulação fraca e o método de Galerkin, obtém-se:

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^{nedg} T_i \vec{W}_i \quad (3.11)$$

e

$$\sum_{i=1}^{nedg} \left( \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_i T_i \cdot (\nabla \times \vec{W}_j) d\Omega \right) = \int_{\Omega} \nabla \times \vec{W}_j \cdot \vec{J} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (3.12)$$

onde  $T_i$  é a circulação do potencial vetor elétrico sobre a aresta  $i$ .

A representação matricial da equação (3.12) é dada por:

$$\sum_{i=1}^{nedg} C_{ij} T_i = D_j \quad j = 1, nedg \quad (3.13)$$

onde  $C_{ij}$  e  $D_j$  são:

$$C_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \times W_i) \cdot (\nabla \times W_j) d\Omega \quad i, j = 1, nedg \quad (3.14)$$

$$D_j = \int_{\Omega} \nabla \times W_j \cdot \bar{J} d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (3.15)$$

ou

$$C_{ij} = \frac{4l_i l_j V}{(6V)^4} \left( \begin{aligned} & (c_i d_{i_2} - d_i c_{i_2})(c_j d_{j_2} - d_j c_{j_2}) + (d_i b_{i_2} - b_i d_{i_2})(d_j b_{j_2} - b_j d_{j_2}) + \\ & (b_i c_{i_2} - c_i b_{i_2})(b_j c_{j_2} - c_j b_{j_2}) \end{aligned} \right) \quad i, j = 1, 6 \quad (3.16)$$

$$D_j = \frac{2l_j V}{(6V)^2} \left( \begin{aligned} & J_x (c_j d_{j_2} - d_j c_{j_2}) + J_y (d_j b_{j_2} - b_j d_{j_2}) + \\ & J_z (b_j c_{j_2} - c_j b_{j_2}) \end{aligned} \right) \quad j = 1, 6 \quad (3.17)$$

onde  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_z$  são as componentes da densidade de corrente  $\bar{J}$ .

As várias experiências numéricas realizadas demonstraram que a condição de fronteira apropriada para (3.12) é  $\vec{E} \times \vec{n} = \mathbf{0}$  na fronteira  $\Gamma$ .

### 3.2.2 Potencial escalar elétrico

A correta distribuição da densidade de corrente  $\bar{J}$  na bobina é uma condição necessária para convergência do sistema. Se esta distribuição não for conseguida, é virtualmente impossível encontrar o  $\bar{T}$  correto e por consequência solucionar-se a equação (3.5).

A distribuição de  $\bar{J}$ , na região da bobina  $\Omega_1$ , é obtida através do potencial escalar elétrico  $V$  em três dimensões com elementos nodais.

O problema físico relativo a este caso é indicado na Fig. 3.3:



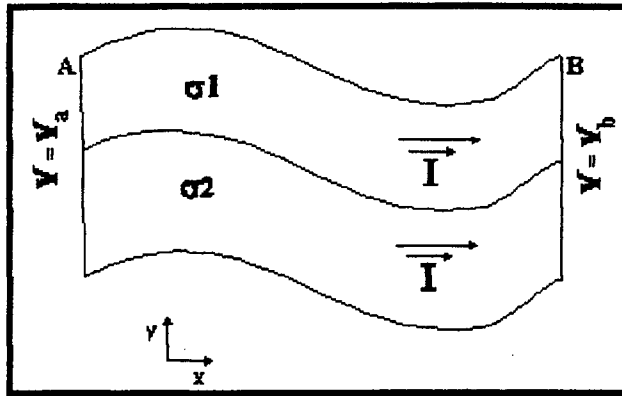


Fig. 3.3 Diferença de potencial.

Neste caso, a diferença de potencial  $(V_a - V_b)$ , fará com que nos meios de diferentes condutividades  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  se estabeleçam correntes numa forma que será determinada pelo processo de cálculo.

Utiliza-se também a relação  $\vec{E} = -\nabla V$ , e a equação da continuidade elétrica (equação 3.2)

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.18)$$

Com a lei local de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.19)$$

tem-se então

$$\nabla \cdot \sigma \vec{E} = \nabla \cdot \sigma (-\nabla V) = 0 \quad (3.20)$$

que sob forma explícita é

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (3.21)$$

Utilizando a formulação fraca e o método de Galerkin, obtém-se:

$$V = \sum_{i=1}^{mo} V_i L_i \quad (3.22)$$

e

$$\sum_{i=1}^{nno} \left( \int_{\Omega_e} \frac{\partial L_i}{\partial x} \sigma_x \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial L_i}{\partial y} \sigma_y \frac{\partial L_j}{\partial y} + \frac{\partial L_i}{\partial z} \sigma_z \frac{\partial L_j}{\partial z} \right) V_i d\Omega_1 = 0 \quad (3.23)$$

onde *nno* é o número de nós do elemento,  $V_i$  é o valor de  $V$  no nó  $i$ .

Se tem-se um só meio de condutividade constante, a equação (3.23) se transforma em:

$$\sum_{i=1}^{nno} \left( \int_{\Omega_e} \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial L_i}{\partial y} \frac{\partial L_j}{\partial y} + \frac{\partial L_i}{\partial z} \frac{\partial L_j}{\partial z} \right) V_i d\Omega_1 = 0 \quad (3.24)$$

onde as funções de interpolação  $L_i$  são dadas por (equação (2.8)):

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \quad i = 1,4 \quad (3.25)$$

A representação matricial da equação (3.24) é:

$$\sum_{i=1}^{nno} S_{ij} V_i = 0 \quad j = 1, nno \quad (3.26)$$

onde a matriz  $S_{ij}$  é dada por:

$$S_{ij} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial L_i}{\partial x} \frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial L_i}{\partial y} \frac{\partial L_j}{\partial y} + \frac{\partial L_i}{\partial z} \frac{\partial L_j}{\partial z} d\Omega_1 \quad i, j = 1, nno \quad (3.27)$$

ou

$$S_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j}{36V} \quad i, j = 1,4 \quad (3.28)$$

A obtenção de  $V$  nos permite chegar à  $\vec{E}$  e, através da lei de Ohm (equação (3.19)), pode-se obter  $\vec{J}$ .

Portanto o método proposto consiste de:

- a) tendo  $\mathbf{V}$ , a densidade de corrente  $\vec{J}$  é calculada através da equação (3.19);
- b) com  $\vec{J}$ , o potencial elétrico  $\vec{T}$  é obtido através da equação (3.12);
- c) com  $\vec{T}$ , a equação (3.5) pode ser resolvida.

### 3.3 O MÉTODO DE FUJIWARA

O método desenvolvido por Fujiwara et al [34,37,38] é específico para o modelo de bobina apresentado na Fig. 3.4 (bobina com seção transversal retangular).

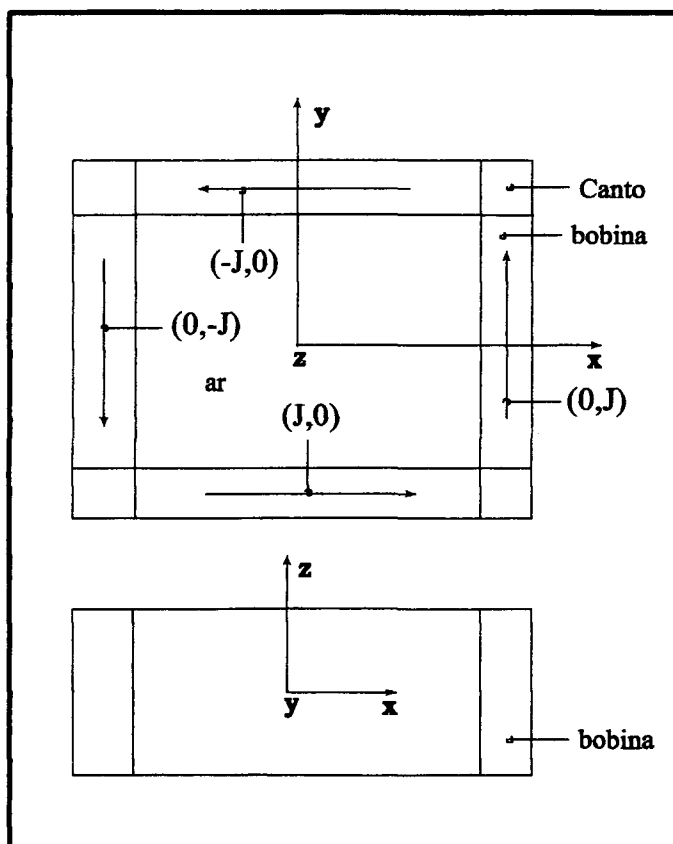


Fig. 3.4 Bobina com núcleo de ar.

A Fig. 3.5 apresenta um quarto da bobina mostrada na Fig. 3.4. Nos elementos localizados segundo as direções  $Ox$  e  $Oy$ ,  $\vec{J}$  tem somente uma componente (segundo  $x$  ou  $y$ ), e satisfaz a equação (3.2). Para promover a continuidade da densidade de corrente nos elementos do “canto” da bobina, utiliza-se as seguintes equações [38]:

$$J_x = \frac{-J(D_{0x} - x_i)}{W} \quad (3.29)$$

$$J_y = \frac{J(D_{0y} - y_i)}{W} \quad (3.30)$$

onde  $(x,y)$  são as coordenadas do baricentro de cada tetraedro e  $D_{0x}$ ,  $D_{0y}$  e  $W$  são definidos na Figura 3.5.

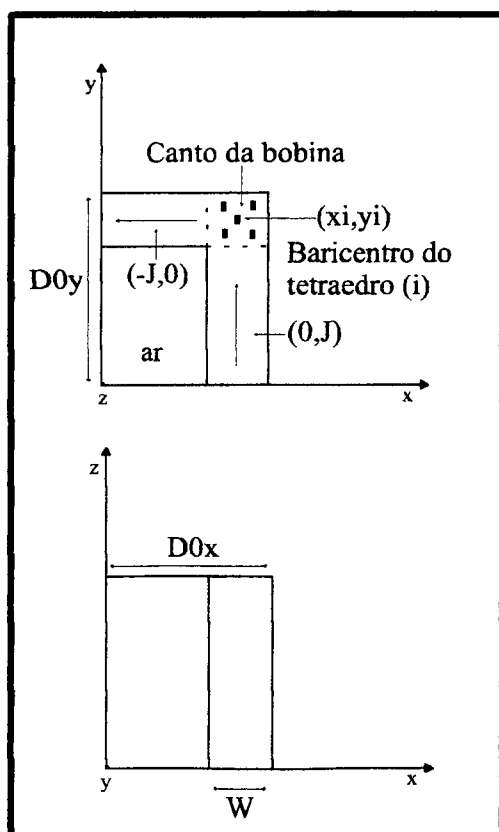


Fig. 3.5 Um quarto da bobina com núcleo de ar.

Portanto a equação (1.36) para o “canto” da bobina da Figura 3.5, torna-se:

$$F_j = \int_{\Omega} \vec{W}_j \cdot (J_x \vec{i} + J_y \vec{j}) d\Omega \quad j = 1, nedg \quad (3.31)$$

ou

$$F_j = \frac{l_j}{24} \left( \frac{-J(D_{0x} - x)(b_{i_2} - b_{i_1})}{W} + \frac{J(D_{0y} - y)(c_{i_2} - c_{i_1})}{W} \right) \quad j = 1,6 \quad (3.32)$$

onde  $b_i$  e  $c_i$  foram definidos no capítulo anterior. Os nós referentes aos índices  $i_1$  e  $i_2$  foram apresentados na Tabela 2.1.

### 3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentado dois métodos utilizados neste trabalho para promover a continuidade da densidade de corrente de magnetização. O método proposto para magnetostática é baseado nos potenciais vetores elétrico e magnético com elementos de aresta e no potencial escalar elétrico com elementos nodais. Mostrou-se também a metodologia utilizada na implementação do método de Fujiwara et al [34,37,38] para elementos tetraédricos.

No próximo capítulo será apresentado o alternador síncrono com polos do tipo “garra”, com atenção especial ao cálculo das grandezas características da máquina.

# **CAPÍTULO 4**

## **ALTERNADOR SÍNCRONO COM POLOS DO TIPO “GARRA”**

### **4.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo é apresentado o alternador síncrono com polos do tipo “garra”, utilizado como gerador elétrico em automóveis.

Inicialmente, a geometria da máquina síncrona com polos do tipo “garra” é fornecida. Em seguida, são revisadas as formulações para o cálculo do fluxo, da força eletromotriz e reatâncias síncronas para este tipo de alternador.

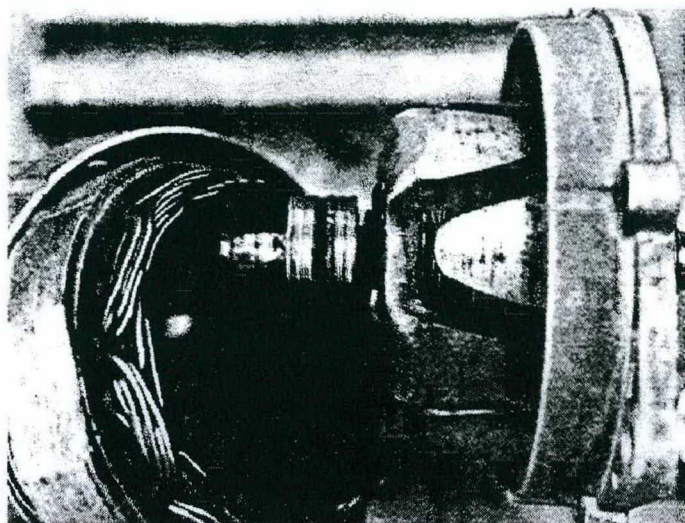
### **4.2 GEOMETRIA DA MÁQUINA**

A característica principal da geometria da máquina síncrona com “garras” reside na forma não convencional de seu rotor. A Fig. 4.1 mostra o estator e o rotor do alternador síncrono. O rotor é totalmente sólido e as peças polares que possuem a forma de “garra” se alternam na sua superfície. O rotor comporta um enrolamento de campo que possui uma “direção” transversal em relação aos enrolamentos estatóricos. A máquina elétrica possui quatro pares de polo.

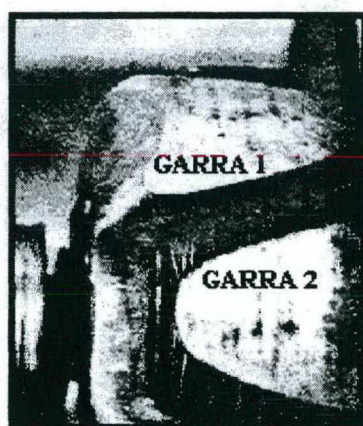
O estator, similar aos utilizados em máquinas síncronas convencionais, é composto de um circuito magnético laminado e de um enrolamento trifásico. Este estator possui 24 ranhuras, e têm uma ranhura por polo e por fase. No veículo o enrolamento trifásico é conectado a uma ponte retificadora para carregar a bateria.

Caminho do fluxo - O fluxo flui axialmente ao longo do núcleo do rotor, sobe para “garra” 1 (Fig. 4.2), entra no estator, move-se ao longo da flange e dos dentes atravessa

o entreferro indo para a “garra” oposta (“garra” 2) e retorna ao núcleo.



*Fig. 4.1 Alternador síncrono com polos do tipo “garra”.*



*Fig. 4.2 Rotor do alternador síncrono.*

## **4.3 GRANDEZAS CARACTERÍSTICAS DA MÁQUINA**

### **4.3.1 Fluxo e força eletromotriz**

O fluxo magnético é calculado através da seguinte expressão [33]:

$$\Phi = \frac{n_e}{S_e} \int_{\Omega_c} (\vec{A} \cdot \vec{n}_0) d\Omega_c \quad (4.1)$$

onde

$$\Phi = n_e \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = n_e \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = n_e \int_l \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (4.2)$$

como  $d\vec{l} = dl \vec{n}_0$ , então

$$\Phi = \frac{n_e}{S_e} \int_l (\vec{A} \cdot \vec{n}_0) dl S_e = \frac{n_e}{S_e} \int_{\Omega_c} (\vec{A} \cdot \vec{n}_0) d\Omega_c \quad (4.3)$$

onde  $S_e$  é a área da seção transversal do enrolamento,  $\vec{n}_0$  é o vetor que indica a direção da corrente e  $n_e$  é o número de espiras. Como o potencial vetor magnético no elemento é dado por  $\vec{A} = \sum_{i=1}^6 A_i \vec{W}_i$ , então a equação (4.1) torna-se:

$$\Phi = \frac{n_e}{S_e} \int_{\Omega_c} \sum_{i=1}^6 (A_i \vec{W}_i \cdot \vec{n}_0) d\Omega_c \quad (4.4)$$

ou

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 \frac{n_e A_i}{S_e} \int_{\Omega_c} (\vec{W}_i \cdot \vec{n}_0) d\Omega_c \quad (4.5)$$

Aplicando a formula de integração apresentada na equação (2.28), obtém-se:

$$\Phi = \frac{n_e}{24 S_e} \sum_{i=1}^6 A_i l_i \left( n_{0x} (b_{i2} - b_{i1}) + n_{0y} (c_{i2} - c_{i1}) + n_{0z} (d_{i2} - d_{i1}) \right) \quad (4.6)$$

onde  $n_{0x}$ ,  $n_{0y}$  e  $n_{0z}$  são as componentes do vetor  $\vec{n}_0$ , e  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  foram definidos no capítulo 2.

A força eletromotriz a vazio, admitindo-se uma distribuição senoidal do fluxo, nas bobinas do induzido é obtida através da seguinte expressão:



$$fem = j n_e w \Phi = j n_e 2 \pi \Phi \quad (4.7)$$

onde  $w$  é a pulsação angular,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $f$  é a frequência e  $\Phi$  é o fluxo gerado pelo enrolamento de campo excitado.

O valor máximo da tensão senoidal induzida vale:

$$fem_{Max} = 2 \pi n_e f \Phi_{Max} \quad (4.8)$$

onde  $\Phi_{Max}$  é o fluxo máximo.

### 4.3.2 Reatâncias síncronas

As máquinas síncronas com polos salientes são caracterizadas por um circuito magnético variável segundo a posição relativa entre estator e rotor. Devido a este fato estas máquinas são normalmente representadas por dois circuitos magnéticos, um no eixo direto e o outro no eixo em quadratura. Por questão de facilidade de representação, a Figura (4.2) apresenta o eixo direto e o eixo em quadratura de uma máquina síncrona com polos salientes convencional com quatro polos.

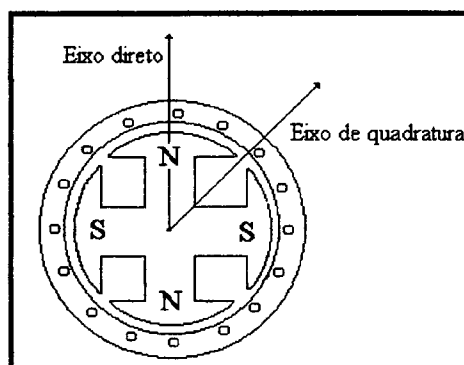
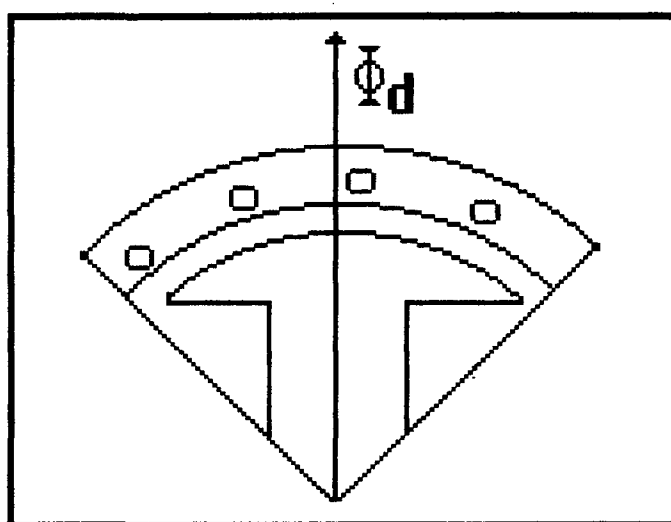


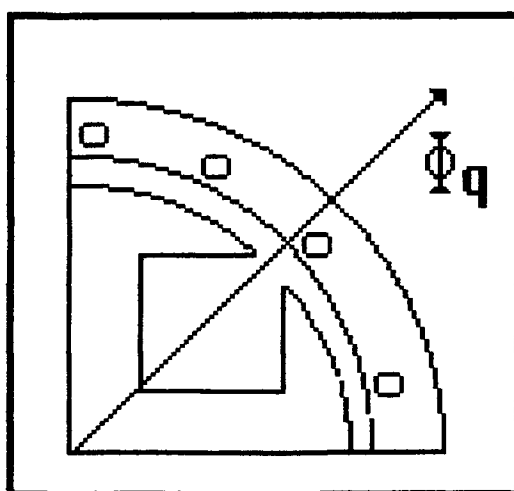
Fig. 4.2 Eixos direto e em quadratura.

O cálculo das reatâncias síncronas  $X_d$  e  $X_q$  da máquina síncrona com “garras” é realizado através da construção de dois modelos (duas posições relativas entre

rotor e estator). Um modelo para obtenção do fluxo  $\Phi_d$  em relação ao eixo direto, e outro para obtenção do fluxo  $\Phi_q$  em relação ao eixo em quadratura. As Figuras (4.3) e (4.4) apresentam exemplos de dois circuitos magnéticos em duas dimensões para máquina síncrona convencional apresentada na Figura (4.2).



*Fig. 4.3 Modelo para obtenção de  $\Phi_d$ .*



*Fig. 4.4 Modelo para obtenção de  $\Phi_q$ .*

As indutâncias  $L_d$  e  $L_q$  e reatâncias  $X_d$  e  $X_q$  relativas aos eixos direto e em quadratura são dadas pelas seguintes expressões:

$$L_d = \frac{n_e}{I} \Phi_d \quad (4.9)$$

$$L_q = \frac{n_e}{I} \Phi_q \quad (4.10)$$

$$X_d = \omega L_d \quad (4.11)$$

$$X_q = \omega L_q \quad (4.12)$$

onde  $\Phi_d$  e  $\Phi_q$  são os fluxos segundo os dois eixos,  $I$  é a corrente e  $\omega = 2\pi f$  onde  $f$  é frequência de operação.

## 4.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentou-se alternador síncrono com polos do tipo “garra”, destacando a maneira pela qual as grandezas características da máquina são calculadas.

No próximo capítulo serão descritos alguns aspectos computacionais relativos aos programas desenvolvidos neste trabalho.

# **CAPÍTULO 5**

## **ASPECTOS COMPUTACIONAIS**

### **5.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo são apresentados alguns aspectos relativos à implementação dos programas computacionais.

Inicialmente, a subdivisão dos elementos base, utilizados na construção da malha de elementos finitos, são apresentadas na seção 5.2. Em seguida, na seção 5.3, apresenta-se a maneira pela qual são definidas as direções das funções de forma.

A estrutura simplificada dos programas é apresentada na seção 5.4 e a estrutura de dados utilizadas nestes programas na seção 5.5. Finalmente, as entradas de dados para as fontes de excitação são apresentadas na seção 5.6.

### **5.2 ELEMENTOS BASE**

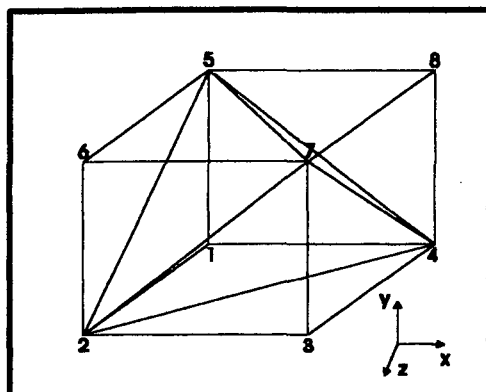
A teoria desenvolvida nos capítulos precedentes utiliza o tetraedro como elemento finito 3D. Entretanto, neste trabalho são utilizados o hexaedro e o pentaedro como elementos base na construção da malha (**Anexo1**). Para promover a continuidade da malha os elementos base sofrem duas subdivisões.

#### **5.2.1 Hexaedro**

A subdivisão do hexaedro em cinco tetraedros é feita da seguinte maneira:

a- Primeira divisão (Fig. (5.1))

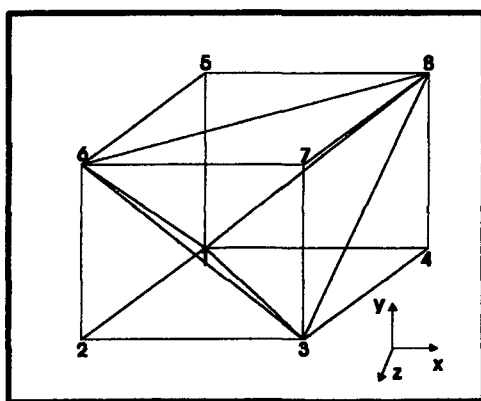
Na primeira divisão os tetraedros são formados pelos seguintes nós:  
 1,4,5,2 - 4,8,5,7 - 2,3,4,7 - 2,5,6,7 - 2,7,4,5.



*Fig. 5.1 Primeira divisão - hexaedro.*

#### b- Segunda divisão (Fig. (5.2))

Na segunda divisão os tetraedros são formados pelos seguintes nós:  
 5,8,6,1 - 8,7,6,3 - 4,1,3,8 - 1,2,3,6 - 1,6,3,8.



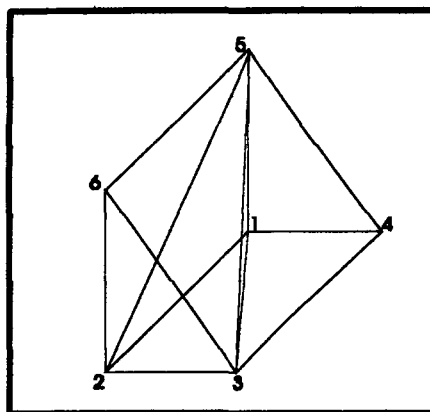
*Fig. 5.2 Segunda divisão - hexaedro.*

### **5.2.2 Pentaedro**

A subdivisão do pentaedro em três tetraedros é feita da seguinte maneira:

a- Primeira divisão (Fig. (5.3))

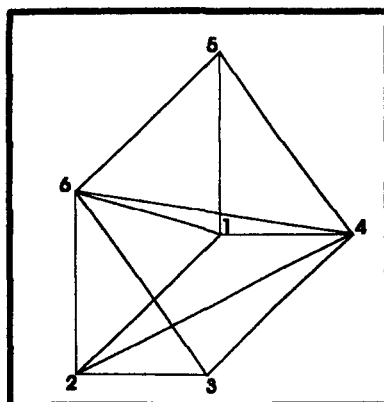
Na primeira divisão os tetraedros são formados pelos seguintes nós:  
2,6,5,3 - 1,5,4,3 - 1,2,5,3.



*Fig. 5.3 Primeira divisão - pentaedro.*

b- Segunda divisão (Fig. (5.4))

Na segunda divisão os tetraedros são formados pelos seguintes nós:  
1,4,5,6 - 2,3,4,6 - 1,2,4,6.



*Fig. 5.4 Segunda divisão - pentaedro.*

5.3 DIREÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA

Para assegurar a continuidade tangencial do potencial vetor (seção 2.4) é necessário definir uma direção para as funções de forma na malha de elementos finitos. A direção de cada função por aresta na malha de elementos finitos é obtida através da comparação entre as direções das arestas de cada elemento com a direção das arestas definidas em um elemento de referência [46]. Se a direção de qualquer umas das arestas do elemento comparado não tem a mesma direção que a sua respectiva aresta no elemento de referência, a função de forma para aresta é multiplicada por -1. Por exemplo, se a direção da aresta 1 no elemento comparado for do nó 2 para o nó 1 a função de forma para aresta 1 é multiplicada por -1.

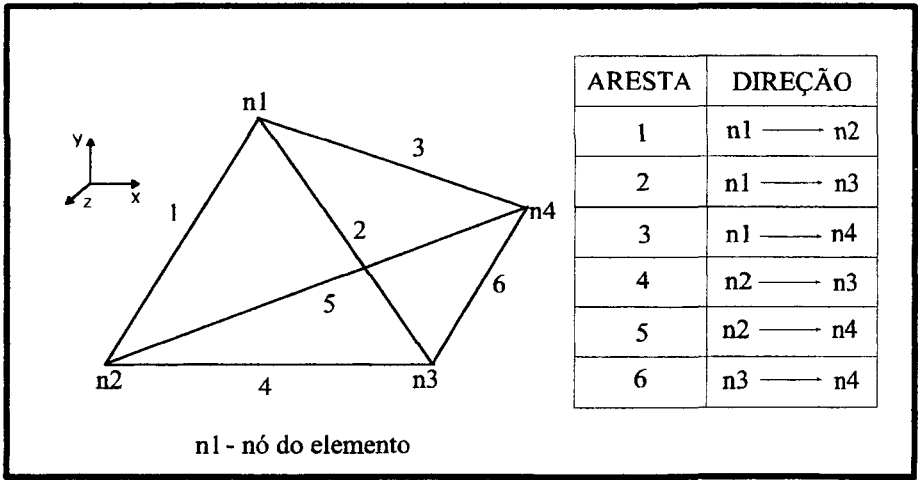


Fig. 5.5 Elemento de referência.

5.4 ESTRUTURA DOS PROGRAMAS

Os programas para cálculo de campos eletromagnéticos utilizando o

método de elementos finitos, são normalmente, separados em , no mínimo, três módulos distintos [1].

#### **5.4.1 Pré-processador**

Neste módulo, de grande interação com o usuário, é introduzida a geometria do problema. Descrevem-se as características dos materiais magnéticos, a sua distribuição, especificam-se as condições de contorno, as fontes de corrente, as condições iniciais, etc. Ainda nesta etapa, a malha de elementos finitos é gerada por um programa malhador. No nosso caso, esta geração não é totalmente automática, isto é, o utilizador deve fornecer uma série de parâmetros para auxiliar o gerador.

O módulo pré-processador permite, também, a visualização da estrutura geométrica do problema. Se houver algum problema, na maior parte dos casos, ele é facilmente detectável por inspeção visual.

#### **5.4.2 Processador**

O módulo processador não possui praticamente nenhuma interação com o usuário. Ele simplesmente lê a estrutura de dados gerada pelo pré-processador, calcula a matriz do sistema, resolve o sistema de equações e grava os resultados obtidos. Isto é, a sua estrutura é seqüencial e completamente automática.

#### **5.4.3 Pós-processador**

Neste módulo exploram-se os resultados obtidos pelo processador. Os resultados são apresentados de forma gráfica (traçado dos vetores de campos, corrente induzidas, induções, etc) ou sob forma numérica (valores de campos, indutâncias, etc).



#### 5.4.4 Fluxograma dos programas

Mostra-se abaixo, sob forma de fluxograma o funcionamento do sistema FEET (Finite Edge Element Tetrahedral).

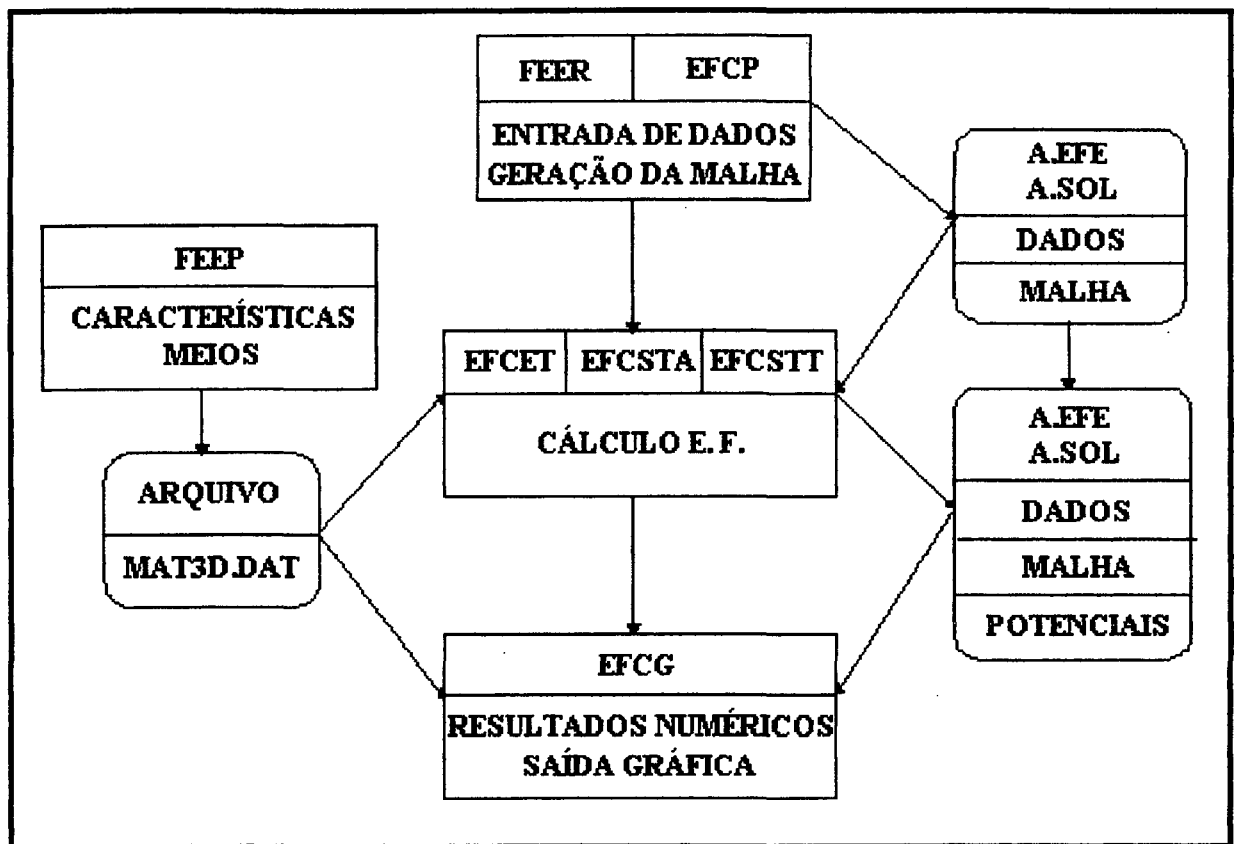


Fig. 5.6 Fluxograma.

#### Pré-processadores

**EFCP** - módulo pré-processador em coordenadas cilíndricas.

**FEER** - módulo pré-processador em coordenadas cartesianas.

### **Processadores**

**EFCSTA** - módulo processador para problemas magnetostáticos. Neste módulo é utilizado somente a formulação potencial vetor magnético.

**EFCSTT** - módulo processador para problemas magnetostáticos. Neste módulo é utilizado as formulações potencial vetor elétrico e magnético com elementos de aresta e a formulação potencial escalar elétrico com elementos nodais.

**EFCET** - módulo processador para problemas com correntes induzidas.

### **Pós-processador**

**EFCG** - Neste módulo é feito o tratamento gráfico do problema, juntamente com o cálculo das grandezas físicas solicitadas pelo usuário.

## **5.5 ESTRUTURA DE DADOS**

A estrutura de dados em um programa de elementos finitos é extremamente importante, pois a eficácia dos algoritmos utilizados está intimamente relacionada com ela.

Nesta seção apresenta-se a estrutura adotada. A seção é dividida em duas partes: na primeira, apresentam-se os dados gerados pelo pré-processador que são utilizados pelos módulos seguintes; na segunda, a estrutura de dados do processador.

### **5.5.1 Estrutura de dados gerada pelo pré-processador**

O pré-processador gera uma série de tabelas que descrevem a topologia e geometria do problema a ser resolvido. As principais variáveis escalares são:

<i>Variáveis escalares</i>	<i>Significado</i>
NEL	Número de elementos
NNO	Número de nós
NTX, NTY, NTZ	Número de divisões segundo x, y e z
IR	Número da região
FATUL	Metro, milímetro...

Os principais arranjos são:

<i>Arranjos</i>	<i>Significado</i>
XCOR(NNO), YCOR(NNO), ZCOR(NNO)	Coordenadas dos nós
KTRI(NEL,J) J=1,4	Nós do elemento
KTRI(NEL,5)	Número do material
IDIR(J),POT(J) J=1,6	Condições de fronteira
NSOU(NEL)	Indica se o elemento possui ou não corrente

**5.5.2 Estrutura de dados gerada pelo processador**

Além dos dados gerados pelo pré-processador, o processador gera e

utiliza alguns dados adicionais. As principais variáveis escalares são:

<i>Variáveis escalares</i>	<i>Significado</i>
NELH	Número de elementos (hexaedro)
NEDG	Número de arestas
NELZ	Número de elementos (bobina)
NOZ	Número de nós (bobina)

Os principais arranjos são:

<i>Arranjos</i>	<i>Significado</i>
A(I,J) I,J=1,6	Contribuição dos elemento
AJ(I,J) I,J=1,6	Jacobiano
WI(J), WJ(J), WK(J) J=1,6	Funções de forma vetoriais
RWI(J), RWJ(J), RWK(J) J=1,6	Rotacional das funções de forma
VV(NEDG)	Potenciais nas arestas
KTRZ(NELZ,J) J=1,4	Nós dos elemento (bobina)
VTX(NOZ)	Potenciais nos nós

## 5.6 ENTRADA DE DADOS

Nesta seção apresenta-se o modo pelo qual é feito a entrada de dados para os métodos que promovem a continuidade da corrente de magnetização.

No método proposto neste trabalho, as fontes de excitação são as condições de fronteira (tensões) impostas nas bobinas. Neste método, o usuário tem apenas que informar os valores das tensões e as fronteiras (planos) onde são aplicadas. No caso da Fig. 5.7 as tensões aplicadas são de 20V e 0V e os planos são respectivamente “down” e “left”.

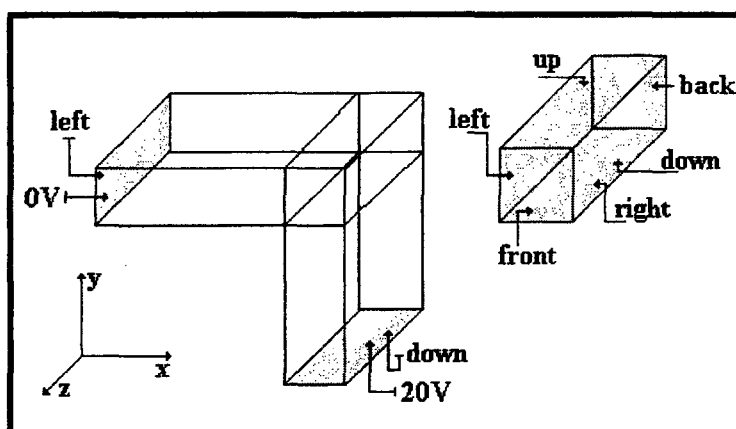
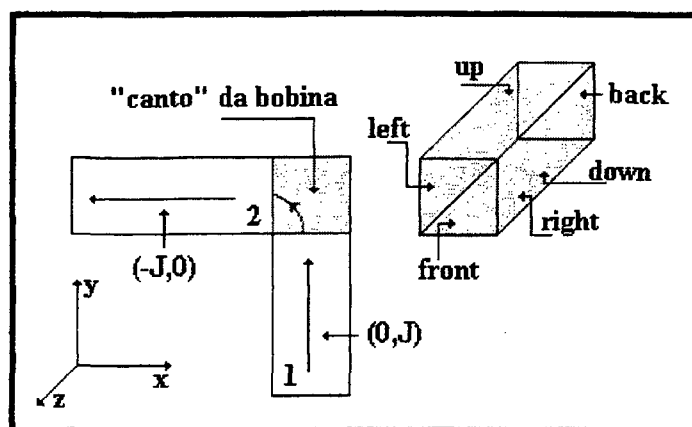


Fig 5.7 Entrada em tensão.

No método de Fujiwara et al [34,37,38] a fonte de excitação é a densidade de corrente imposta na bobina. Neste método o usuário tem de informar: as direções da corrente nas partes retas da bobina, os “cantos” e os planos de entrada e saída da corrente. Por exemplo, na Fig. 5.8 as direções das correntes nas partes retas (1 e 2) são respectivamente  $(0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k})$  e  $(-1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k})$ . No “canto” da bobina a corrente entra no plano “down” e sai no plano “left”.



*Fig. 5.8 Entrada com densidade de corrente.*

Do exposto acima conclui-se que o método de Fujiwara, além de ser um método específico para este tipo de bobina (com seção transversal retangular), é relativamente menos “amigável” que o método proposto, em relação ao usuário (devido sua entrada de dados).

## 5.7 CONCLUSÃO

Neste capítulo descreveu-se alguns aspectos computacionais usados nos programas desenvolvidos neste trabalho. As subdivisões dos elementos base (hexaedro e pentaedro), utilizados na construção da malha de elementos finitos, foram apresentadas. É interessante ressaltar a introdução neste trabalho de um conceito de direcionamento de arestas. Destacou-se também as entradas de dados para os métodos que promovem a continuidade da corrente.

No próximo capítulo serão apresentados e comentados os resultados que validaram as formulações apresentadas nos capítulos anteriores.

# CAPÍTULO 6

## RESULTADOS E COMPARAÇÕES

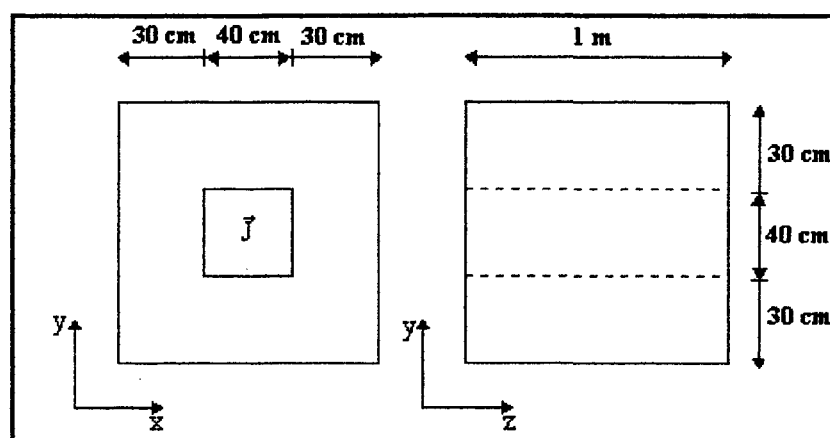
### 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com o sistema computacional desenvolvido utilizando as formulações apresentadas nos capítulos anteriores, e denominado **FEET** (Finite Edge Element Tetrahedral  $\Rightarrow$  3D). Inicialmente, os resultados obtidos através do **FEET** serão comparados com os resultados de dois programas já validados, o **FEECAD** (Finite Edge Element Computer Aided Design  $\Rightarrow$  3D), e o **EFCAD** (Eletromagnetic Field Computer Aided Design  $\Rightarrow$  2D) desenvolvidos no **GRUCAD** (Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos). Em seguida, são realizados os cálculos, analítico e numérico, da força no entreferro de um contator. Neste exemplo utiliza-se a formulação de Fujiwara et al [39] para elementos tetraédricos. Posteriormente, para comprovar a continuidade da corrente de magnetização, através do método proposto neste trabalho, três exemplos numéricos são apresentados. Finalmente, apresenta-se os resultados numéricos e experimentais obtidos para o alternador síncrono com polos do tipo “garra”.

### 6.2 ESTRUTURA EM FORMA DE CUBO

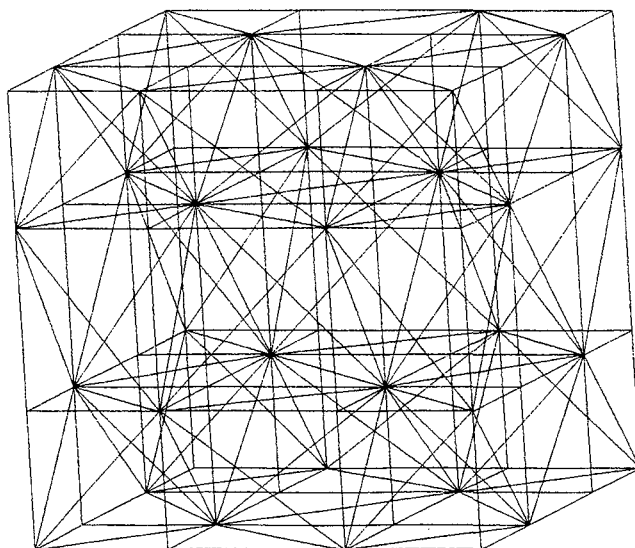
O objetivo deste exemplo é verificar a consistência da formulação estática implementada no programa **FEET**. A estrutura em forma de cubo é apresentada na Fig. 6.1. A condição de fronteira  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  é imposta na fronteira do domínio de estudo. A permeabilidade magnética considerada é a permeabilidade do ar ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ ), e a densidade de corrente utilizada na simulação é  $\vec{J} = -50\vec{k} \text{ A/mm}^2$ .

Esta estrutura tem um caráter bidimensional. Contudo, do ponto de vista numérico, ela pode ser estudada como um problema tridimensional, porque mesmo com a densidade de corrente paralela aos lados do cubo, o potencial vetor não é necessariamente paralelo a densidade de corrente.



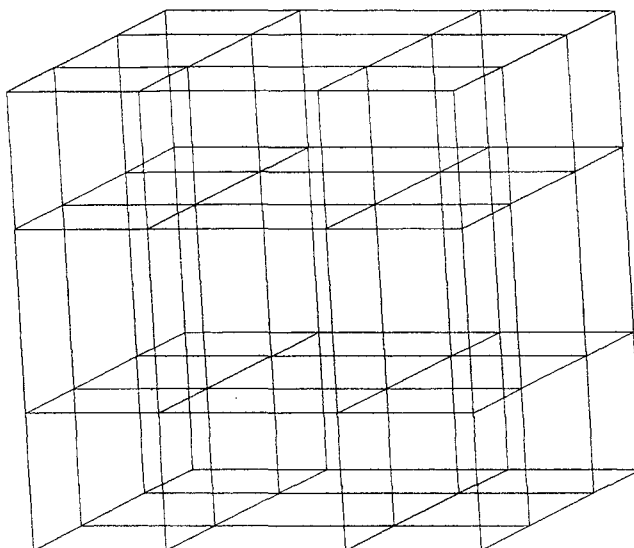
*Fig. 6.1 Estrutura em forma de cubo.*

As malhas correspondentes aos programas são apresentadas nas Figs. 6.2, 6.3 e 6.4.

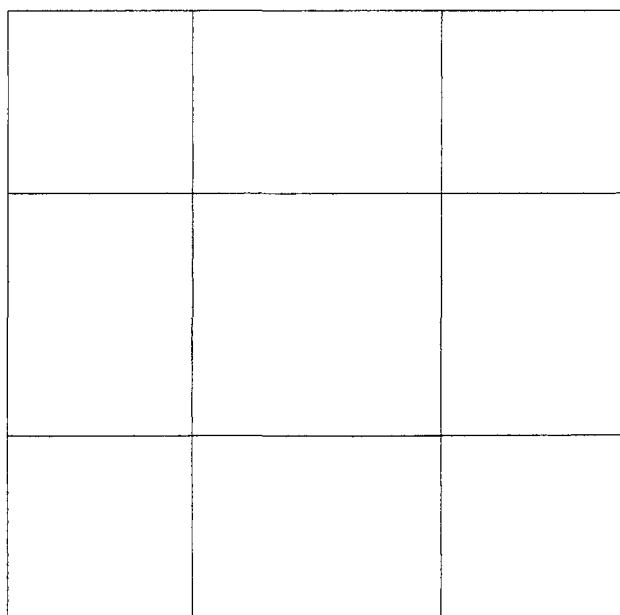


*Fig. 6.2 Malha **FEET** (135 elementos - 252 arestas - 64 nós).*





*Fig. 6.3 Malha **FEECAD** (27 elementos - 144 arestas - 64 nós).*



*Fig. 6.4 Malha **EF CAD** (9 elementos - 16 nós).*

As induções magnéticas calculadas nas retas com posições  $(x_1 = 0, y_1 = 50\text{cm}, z_1 = 50\text{cm} \text{ e } x_2 = 100\text{cm}, y_2 = 50\text{cm}, z_2 = 50\text{cm} \mapsto 3D)$  e  $(x_1 = 0, y_1 = 50\text{cm} \text{ e } x_2 = 100\text{cm}, y_2 = 50\text{cm} \mapsto 2D)$  são apresentadas nas Figs. 6.5, 6.6 e 6.7.

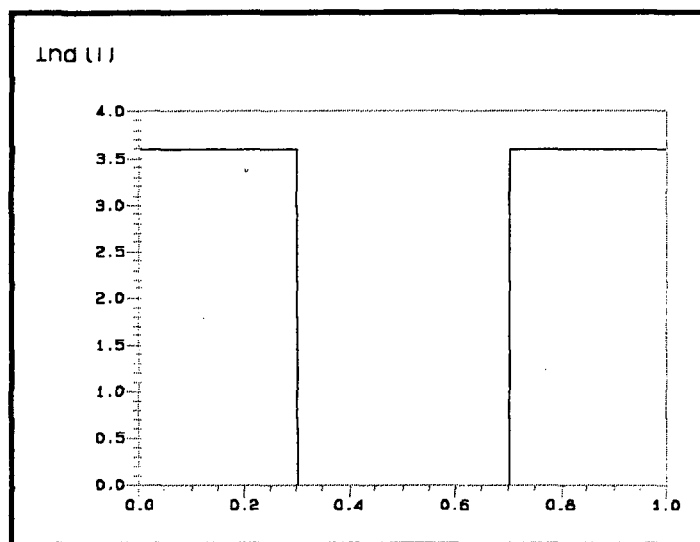


Fig. 6.5 Indução magnética **EFCAD**.

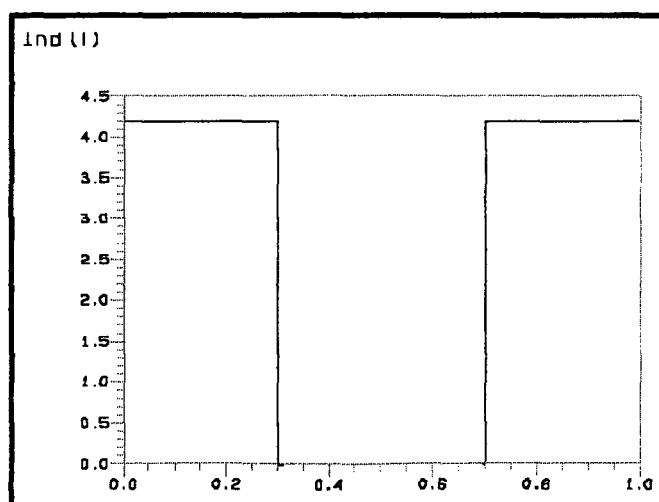
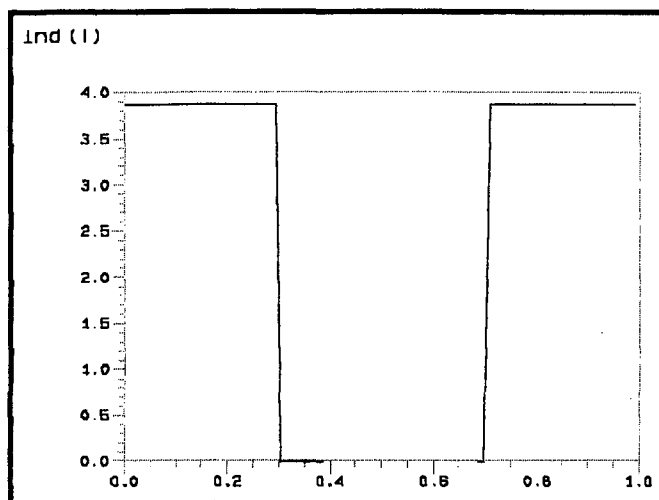


Fig. 6.6 Indução magnética **FEECAD**.



*Fig. 6.7 Indução magnética FEET.*

Neste primeiro exemplo, de caráter didático, pode-se extrair que as ferramentas computacionais implementadas conduzem a resultados coerentes. É interessante ressaltar, que para este caso, o número de iterações do método de resolução do sistema matricial (ICCG) para os programas **FEET** e **FEECAD** foram 10 e 8 respectivamente. Isto se deve ao maior número de arestas incógnitas geradas pela discretização do domínio de estudo com elementos tetraédricos (**FEET**- 90 e **FEECAD**- 36). As arestas com potencial imposto são retiradas do sistema matricial a ser resolvido.

### 6.3 ESTRUTURA COM IMÃ

O objetivo deste exemplo é validar a formulação com ímãs permanentes implementada no sistema **FEET**. A estrutura magnética contendo um ímã permanente é apresentada na Fig. 6.8. A indução remanente considerada no ímã é de  $1\vec{j}T$ , e a condição de fronteira  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  é aplicada na fronteira do domínio.

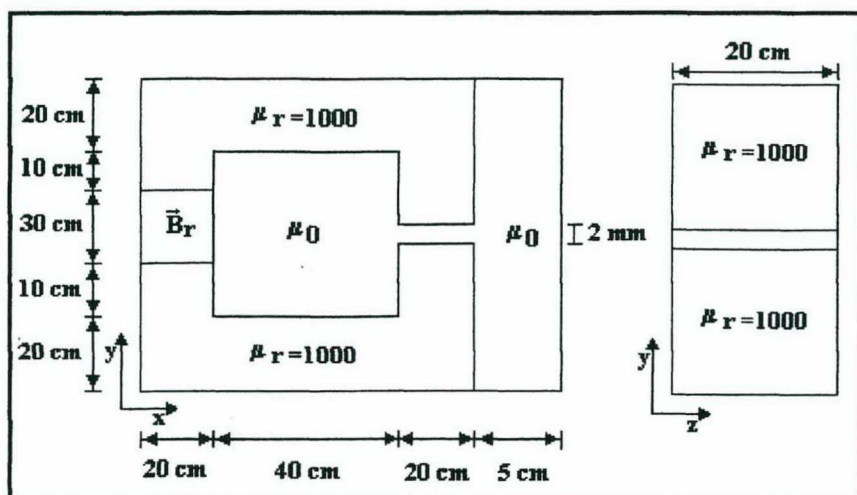


Fig. 6.8 Estrutura com imã.

As malhas relativas aos três programas são apresentadas nas Figs. 6.9, 6.10 e 6.11.

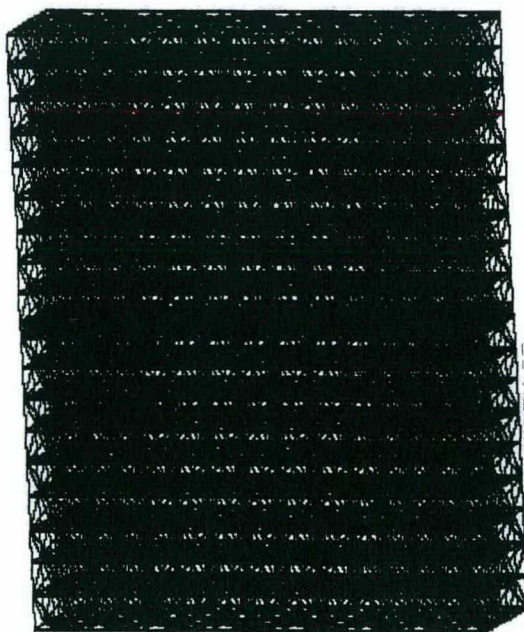


Fig. 6.9 Malha **FEET** (6000 elementos - 8559 arestas - 1680 nós).

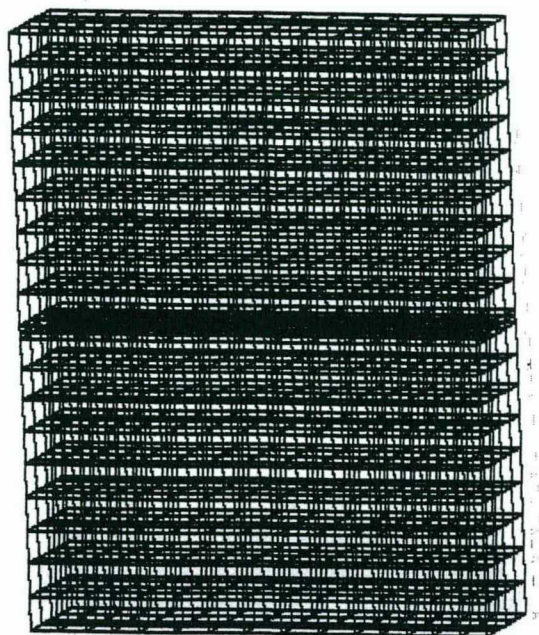


Fig. 6.10 Malha **FEECAD** (1200 elementos - 4519 arestas - 1680 nós).

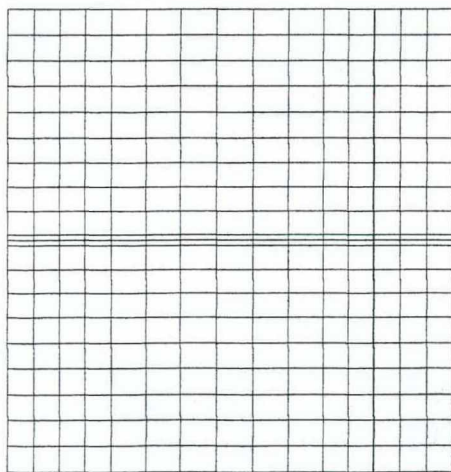
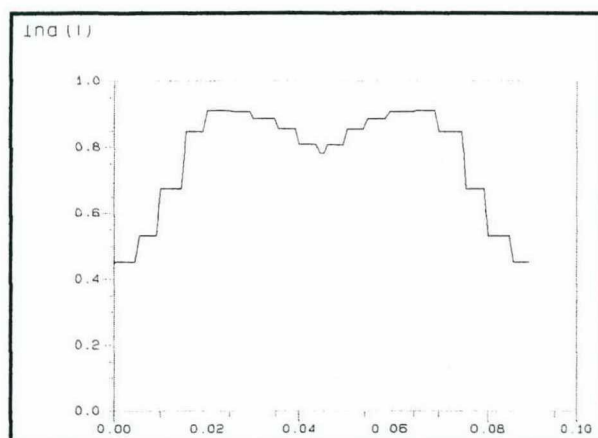


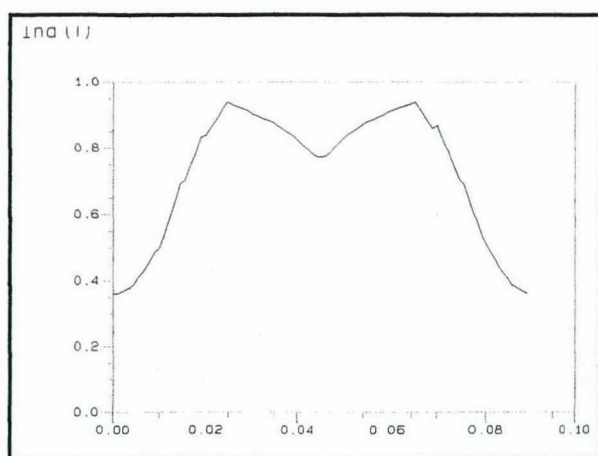
Fig. 6.11 Malha **EFCAD** (300 elementos - 336 nós).

As induções magnéticas calculadas nas retas com posições  
 $(x_1 = 70\text{cm}, y_1 = 0, z_1 = 10\text{cm} \text{ e } x_2 = 70\text{cm}, y_2 = 90\text{cm}, z_2 = 10\text{cm} \mapsto 3D)$  e

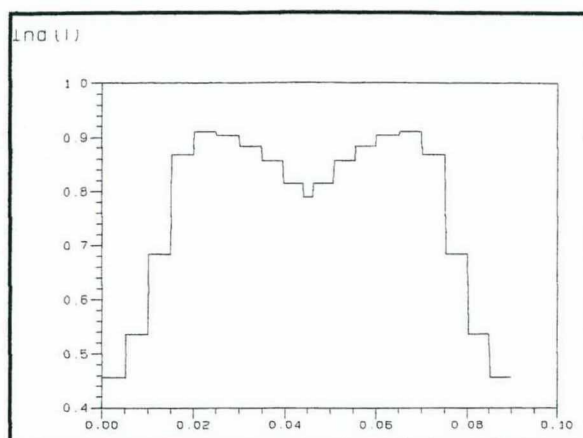
$(x_1 = 70\text{cm}, y_1 = 0 \text{ e } x_2 = 70\text{cm}, y_2 = 90\text{cm} \mapsto 2D)$  são demonstradas nas Figs. 6.12, 6.13 e 6.14.



*Fig. 6.12 Indução magnética **FEET**.*



*Fig. 6.13 Indução magnética **FEECAD**.*



*Fig. 6.14 Indução magnética EFCAD.*

Neste exemplo nota-se que os valores de indução magnética obtidos, através dos três programas, apresentam uma boa concordância. É interessante observar que, neste caso, o tempo de processamento dos programas **FEET** e **FEECAD** foram de 60 e 20 segundos respectivamente. O maior tempo de processamento do programa **FEET** é devido ao maior número de incógnitas. O número de iterações do método ICCG para os programas **FEET** e **FEECAD** foram 45 e 19, e o número de arestas incógnitas foram 5919 e 2795.

## 6.4 ELETROIMÃ

O objetivo deste exemplo é comprovar a consistência da formulação de Newton-Raphson implementada no programa **FEET**. A estrutura a ser analisada, neste exemplo, é o eletroimã apresentado na Fig. 6.15 (a). A densidade de corrente utilizada na simulação é de  $\vec{J} = 7\vec{k} \text{ A/mm}^2$ . O dispositivo eletromagnético com esta densidade de corrente imposta, aliado a escolha do material permitem, propositalmente, colocar em evidência o fenômeno de saturação magnética. Utiliza-se neste caso não linear a



formulação de Newton-Raphson. A condição de fronteira  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  é aplicada na fronteira do domínio de estudo. A Fig. 6.15 (b) apresenta a curva  $\vec{B}(\vec{H})$  do ferro.

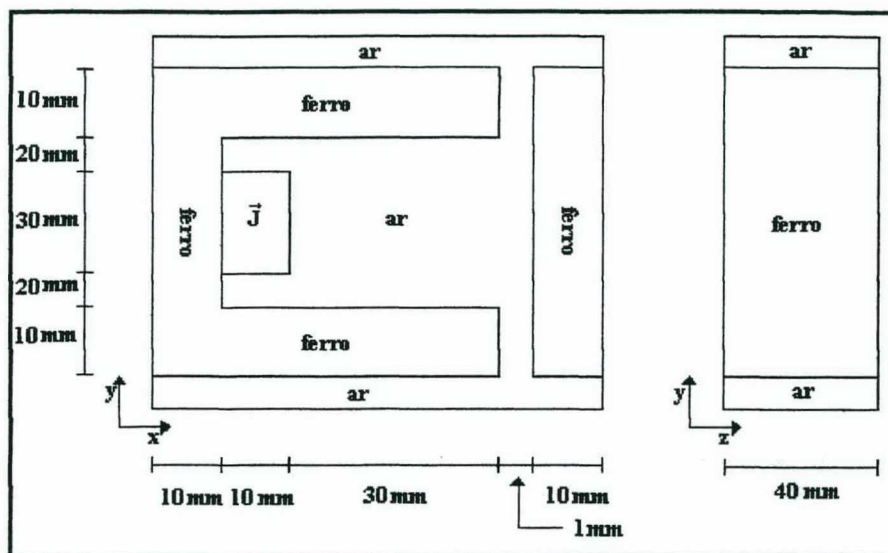


Fig. 6.15 (a) Eletroímã.

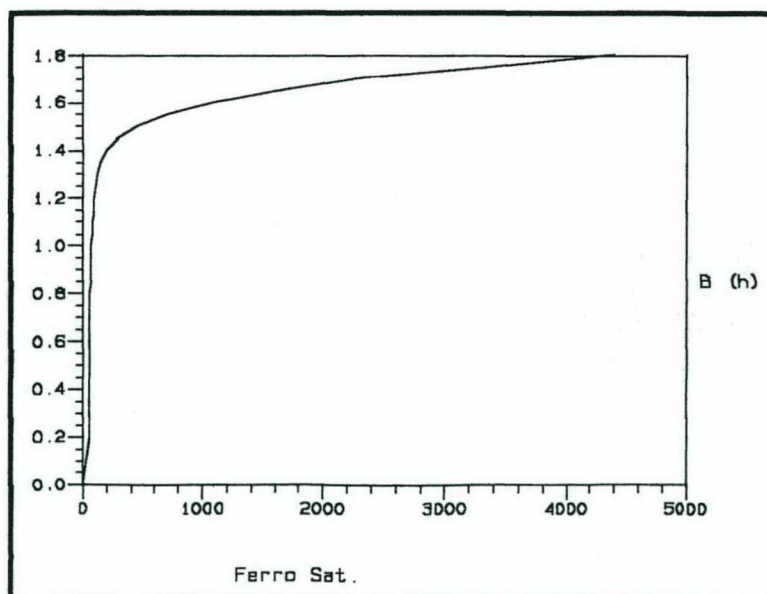
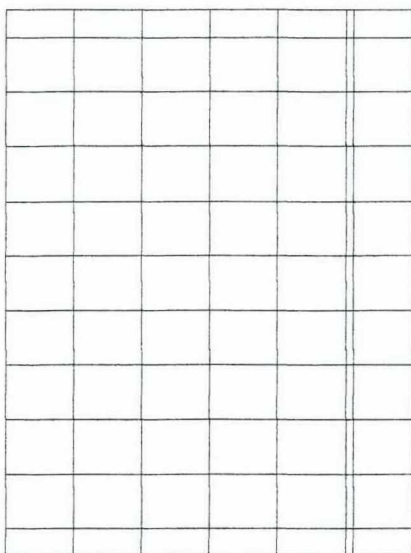


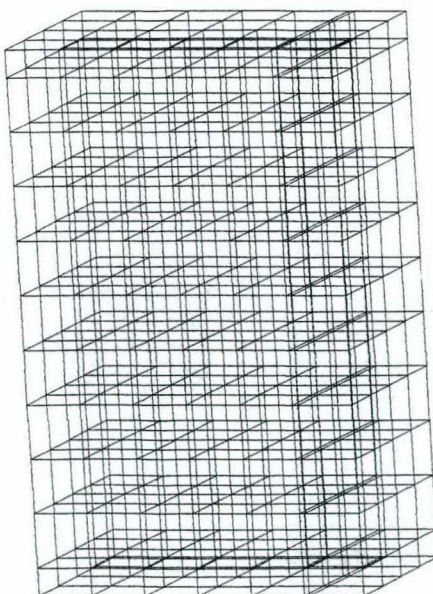
Fig. 6.15 (b) Curva  $\vec{B}(\vec{H})$  para o ferro.



As malhas utilizadas nesta comparação, são apresentadas nas Figs. 6.16, 6.17 e 6.18.



*Fig. 6.16 Malha **EFCAD**(77 elementos - 96 nós ).*



*Fig. 6.17 Malha **FEECAD** (300 elementos - 1244 arestas - 480 nós).*

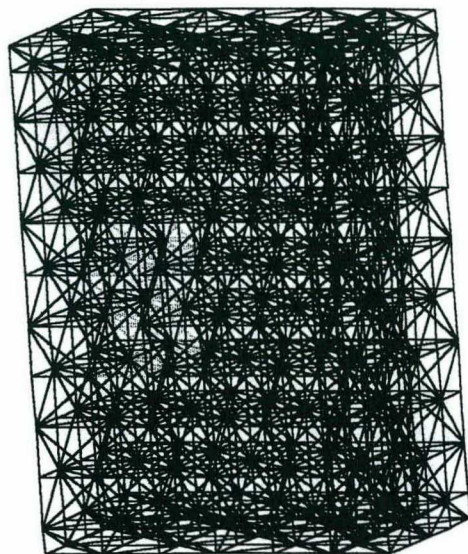


Fig. 6.18 Malha **FEET** (1540 elementos - 2317 arestas - 480 nós).

As induções magnéticas calculadas nas retas com posições  $(x_1 = 50.5 \text{ mm}, y_1 = 0, z_1 = 0 \text{ mm} \text{ e } x_2 = 50.5 \text{ mm}, y_2 = 100 \text{ mm}, z_2 = 0 \text{ mm} \mapsto 3D)$  e  $(x_1 = 50.5 \text{ mm}, y_1 = 0 \text{ e } x_2 = 100 \text{ mm}, y_2 = 90 \text{ mm} \mapsto 2D)$  são demonstradas nas Figs. 6.19, 6.20 e 6.21.

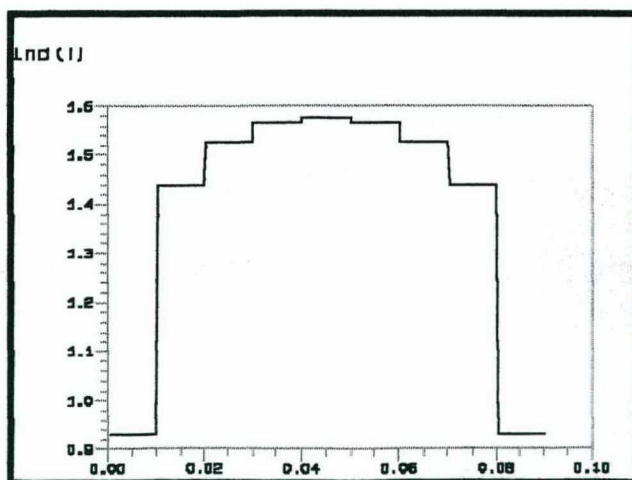


Fig. 6.19 Indução magnética **EFCAD**.

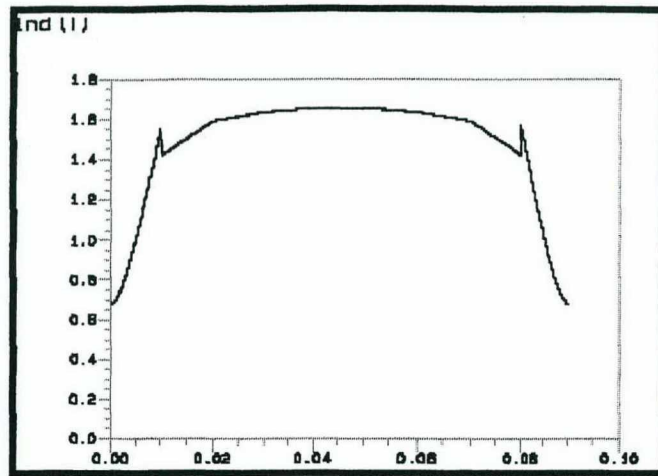


Fig. 6.20 Indução magnética **FEECAD**.

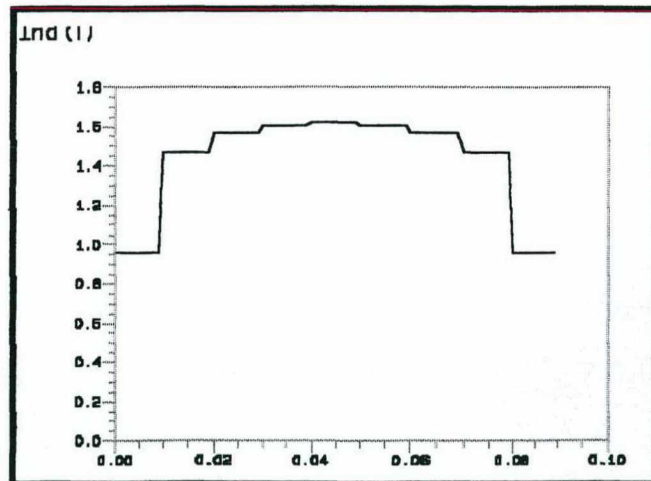


Fig. 6.21 Indução Magnética **FEET**.

A eficácia do método de Newton-Raphson, implementado no programa **FEET**, pode ser comprovada através da boa concordância entre os valores de indução magnética obtidas nos três programas. O sistema não linear convergiu para os programas **FEET** e **FEECAD** após 21 e 15 iterações respectivamente. Sendo para o programa **FEECAD** 3 iterações por aproximações sucessivas e 12 por Newton-Raphson. Para o programa **FEET** 6 iterações por aproximações sucessivas e 15 por Newton-Raphson. A Tabela 6.1 apresenta a característica de convergência dos dois programas para o método de Newton-Raphson.

Iterações	FEET	FEECAD
1	0.1800	0.1871
2	0.1678	0.1667
3	0.1416	0.1391
4	0.1202	0.1083
5	0.9250 e-1	0.7894 e-1
6	0.6785 e-1	0.5297 e-1
7	0.4833 e-1	0.3294 e-1
8	0.3334 e-1	0.1885 e-2
9	0.2315 e-1	0.9875 e-2
10	0.1542 e-1	0.4735 e-2
11	0.9764 e-2	0.2082 e-2
12	0.5784 e-2	0.8383 e-3
13	0.3232 e-2	
14	0.1649 e-2	
15	0.7755 e-3	

*Tab. 6.1 Característica de convergência (**FEET** e **FEECAD**).*

O erro indicado na tabela 6.1 corresponde a relação entre o somatório dos resíduos das equações do sistema linear e o somatório dos vetores do lado direito (termos fontes).



## 6.5 CONTATOR

O objetivo deste exemplo é comprovar a consistência da:

- formulação de Fujiwara para promover a continuidade da corrente de magnetização com elementos tetraédricos;
- formulação para o cálculo da força implementada no programa **FEET**;
- formulação para correntes induzidas implementada no programa **FEET**.

Contatores são amplamente utilizados em aplicações elétricas. Seu circuito magnético é composto por um núcleo de ferro laminado com dois tipos de enrolamentos elétricos. O primeiro tem um grande número de condutores finos; o segundo é um anel condutor grosso (anel de curto-circuito), onde as correntes são induzidas. A estrutura a ser empregada neste exemplo é mostrada na Fig. 6.22. Inicialmente é feito o cálculo analítico da força no entreferro através do tensor de Maxwell. Em seguida, o cálculo numérico da força é realizado através do programa **FEET**. Finalmente, é colocado um anel condutor nas ranhuras do entreferro e calcula-se as correntes induzidas.

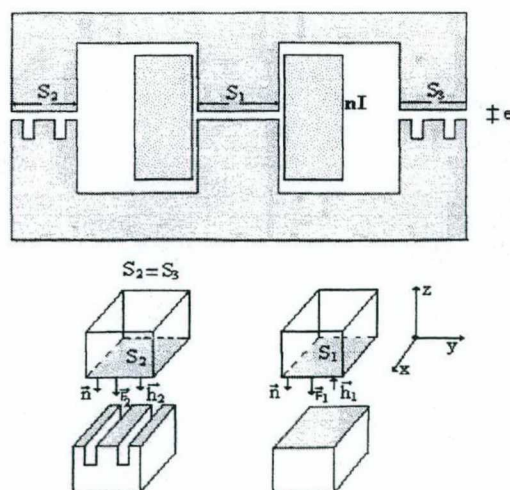


Fig. 6.22 Contator

## 6.5.1 Cálculo da força

### 6.5.1.1 Cálculo analítico

Nesta seção será realizado o cálculo aproximado da força no entreferro do contator. Antes de abordar este problema se fará algumas observações:

- Considera-se  $\mu_f \gg \mu_0$  ( $\mu_f$  - permeabilidade no ferro). O campo no ferro é desprezível em relação aos campos nos entreferros.
- Os campos nos entreferros é considerado constante, isto é, sem espraiamento nas bordas dos mesmos.

Da equação da circulação de campo, tem-se:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI \quad (6.1)$$

onde  $n$  é o número de espiras;  $I$  a corrente e  $l$  o caminho de circulação.

Considerando que o ferro tenha uma permeabilidade infinita, então tem-se:

$$H_1 e + H_2 e = nI \quad (6.2)$$

$$H_1 e + H_3 e = nI \quad (6.3)$$

onde  $e$  é o comprimento do entreferro.

Como tem-se duas equações e três incógnitas deve-se procurar, na condição de conservação de fluxo, a outra equação que completará este sistema.

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (6.4)$$

Portanto, tem-se:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad (6.5)$$

onde  $\Phi$  é dado por  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$  e

$$\mu_0 H_1 S_1 = \mu_0 H_2 S_2 + \mu_0 H_3 S_3 \quad (6.6)$$

ou

$$H_2 = \frac{H_1 S_1 - H_3 S_3}{S_2} \quad (6.7)$$

Substituindo agora (6.6) em (6.2) e depois (6.8) em (6.3), tem-se:

$$H_3 = \frac{H_1 (S_1 e + S_2 e) - n I S_2}{S_3 e} \quad (6.8)$$

$$H_1 = \frac{n I (S_3 + S_2)}{e (S_1 + S_2 + S_3)} \quad (6.9)$$

Sendo:

$$S_1 = 171,6 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = S_3 = 140,25 \text{ mm}^2$$

$$e = 2 \text{ mm}$$

$$n I = 844 \text{ Aespira}$$

obtem-se:

$$H_1 = 261.824,82 \text{ A/m}$$

$$H_2 = H_3 = 160.175,18 \text{ A/m}$$

Como a peça móvel só terá forças não nulas no entreferro, então:

$$F_1 = \frac{\mu_0 H_1^2 S_1}{2} = 7,39 \text{ N} \quad (6.10)$$

$$F_2 = \frac{\mu_0 H_2^2 S_2}{2} = 2,26 \text{ N} = F_3 \quad (6.11)$$

A força resultante é:

$$F_r = F_1 + F_2 + F_3 = 11,91 \text{ N} \quad (6.12)$$

### 6.5.1.2 Simulação

Devido a simetria da estrutura eletromagnética, apenas a metade da estrutura do contator (Fig. 6.23) é utilizada no cálculo da força. Sendo  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  a condição de fronteira aplicada, e

$$\vec{J} = \frac{844}{17 \times 6.8} = 7.3 \text{ A/mm}^2 \quad (6.13)$$

o valor da densidade de corrente usada na simulação.

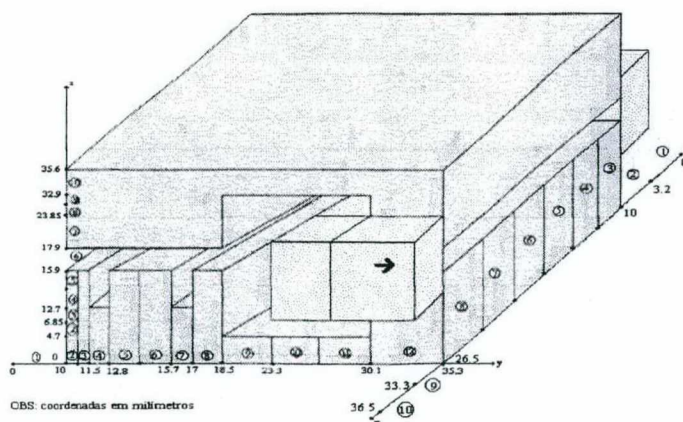
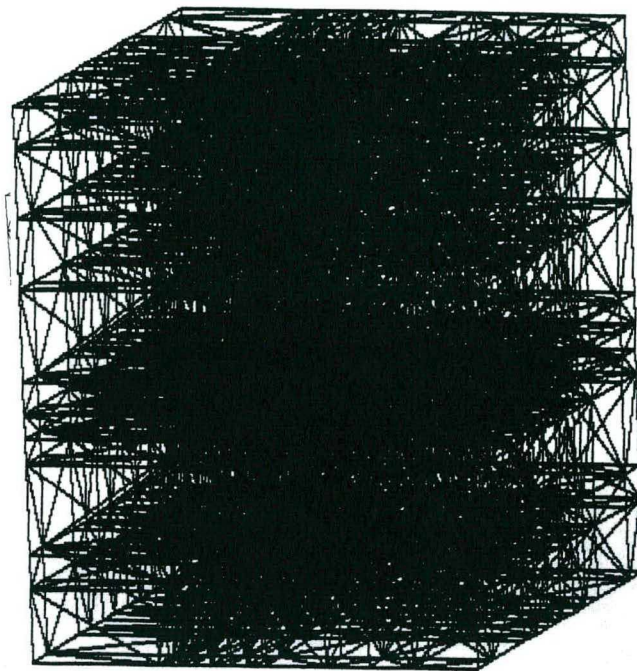


Fig. 6.23 Metade da estrutura da contator.



A Fig. 6.24 apresenta a malha utilizada na simulação.



*Fig. 6.24 Malha **FEET** (6000 elementos - 8252 arestas - 1573 nós).*

A Tabela 6.2 apresenta os valores, numérico e analítico, da força no entreferro.

	<i>Analítico</i>	<i>FEET</i>
<b>Força (N)</b>	<b>11,91</b>	<b>11,490</b>

*Tabela 6.2 - Força no entreferro.*

### 6.5.2 Correntes induzidas

Neste exemplo um anel condutor é inserido nos dentes do entreferro do contator apresentado na Fig. 6.23. O sinal de entrada na bobina e as curvas dos módulos das densidades de corrente induzidas, calculadas no ponto  $(18.25\text{ mm}, 12.15\text{ mm}, 14.3\text{ mm})$ , no anel condutor, são apresentados nas Figs. 6.25 e 6.26 respectivamente. O tempo total da simulação foi de 0.1s e o passo de cálculo de 0.01s.

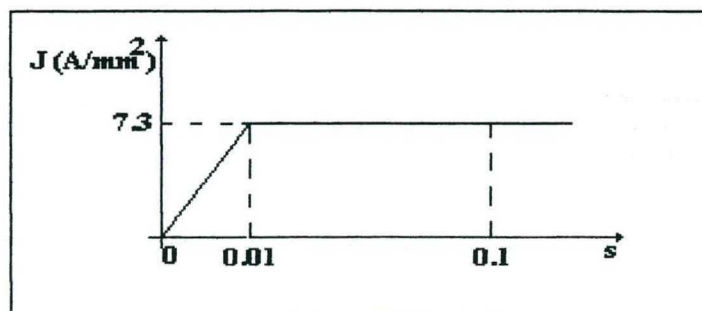


Fig. 6.25 Densidade de corrente no enrolamento.

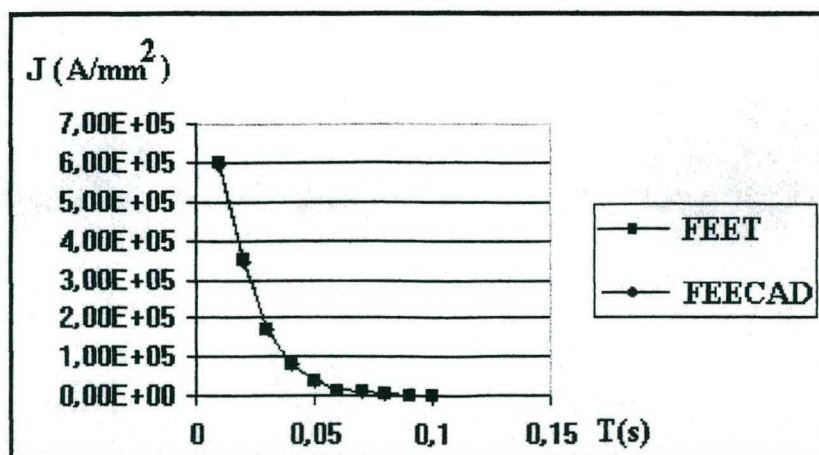
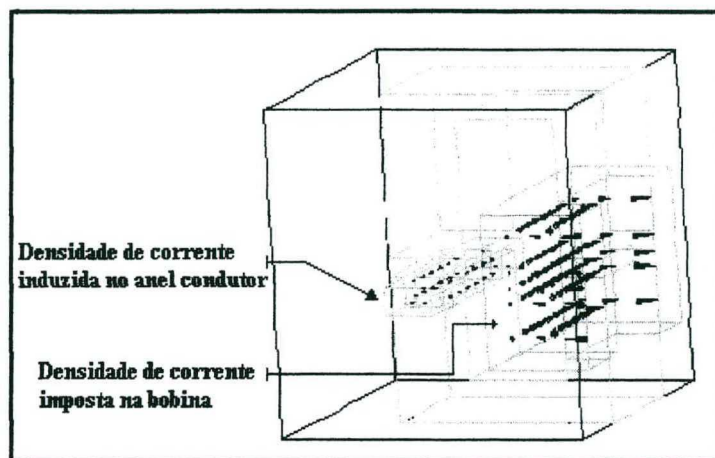


Fig. 6.26 Correntes induzidas no anel condutor (FEET e FEECAD).

As distribuições dos vetores representando a densidade de corrente, induzida no anel condutor e imposta na bobina, são apresentadas na Fig. 6.27.



*Fig. 6.27 Densidade de corrente induzida.*

A eficácia dos procedimentos de cálculo pode ser novamente verificada comparando-se os resultados analítico e numérico da força apresentado na Tabela 6.2. Através dos resultados obtidos (gráficos e numéricos) pode-se também concluir que o método de Fujiwara et al [39] apresenta bons resultados quando utilizado com elementos tetraédricos. Apresentou-se também, neste exemplo, o cálculo das densidades de corrente induzida no anel condutor. Pode-se observar que as curvas das densidades de corrente induzida obtidas através dos programas **FEET** e **FEECAD** apresentam uma boa concordância. Estas correntes aparecem no sentido de criar um campo que se oponha a variação do campo criado pela bobina. Este tipo de simulação é dificilmente feito por um método analítico. É interessante ressaltar que o **FEECAD** é um programa que já foi validado através dos problemas 10,13,20 e 21 do Team Workshop [1].

## 6.6 BOBINA DE FORMA CIRCULAR

O objetivo deste exemplo é verificar a consistência da aproximação proposta numa bobina de forma circular. A Fig. 6.28 apresenta uma estrutura magnética



contendo uma bobina de forma circular. As tensões ( $20V$  e  $0V$ ), aplicadas com condições de fronteira na bobina, são também apresentadas. A condição de fronteira  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  é imposta na fronteira do domínio de estudo. O exemplo é solucionado em duas dimensões (axi-simétrico) pelo programa **EFCAD**, e em três dimensões pelo programa **FEET** (utilizando o método proposto).

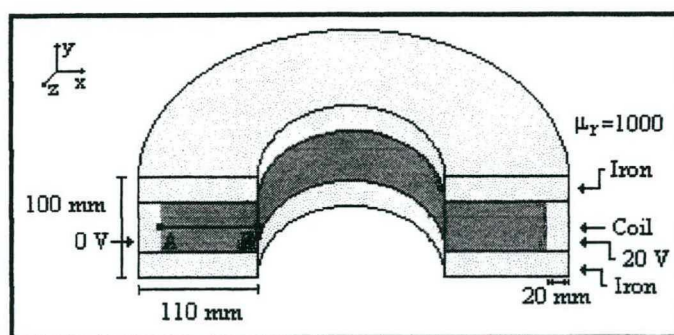


Fig. 6.28 Estrutura magnética com uma bobina de forma circular.

Os valores de indução magnética (2D e 3D), calculados na linha entre os pontos **A** e **B**, são apresentados na Fig. 6.29.

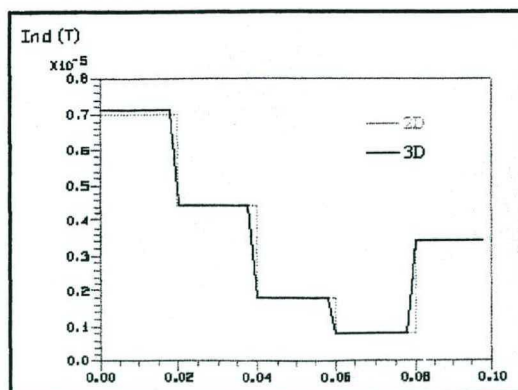


Fig. 6.29 Valores de indução na linha entre os pontos **A** e **B**.

As curvas de indução magnética obtidas através dos dois programas

apresentam uma boa concordância. As pequenas diferenças são, na maior parte, causadas pelas malhas diferentes.

## 6.7 BOBINA COM DIFERENTES SEÇÕES TRANSVERSAIS

O objetivo deste exemplo é comprovar, através da aproximação proposta, a continuidade da corrente de magnetização numa bobina com diferentes seções transversais. A Fig. 6.30 apresenta uma estrutura magnética contendo uma bobina com diferentes seções transversais (sendo que a seção da região 2 é maior que as seções das regiões 1 e 3). A Fig. 6.31 mostra os vetores representando as densidades de corrente nos elementos que constituem a bobina. Por facilidade de visualização somente a vista frontal é apresentada.

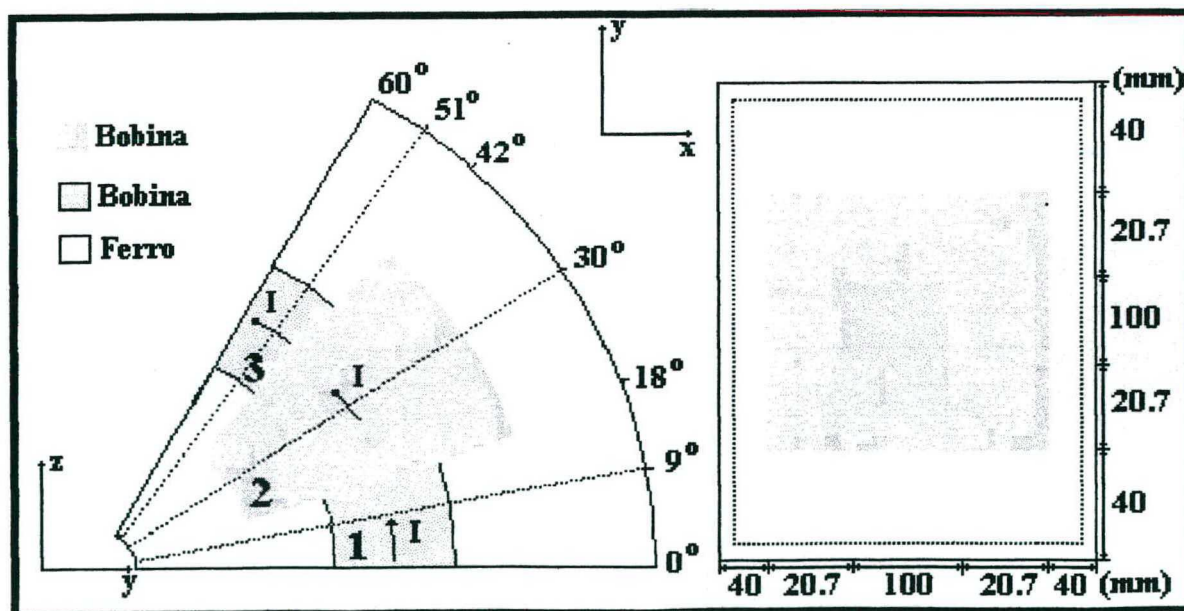
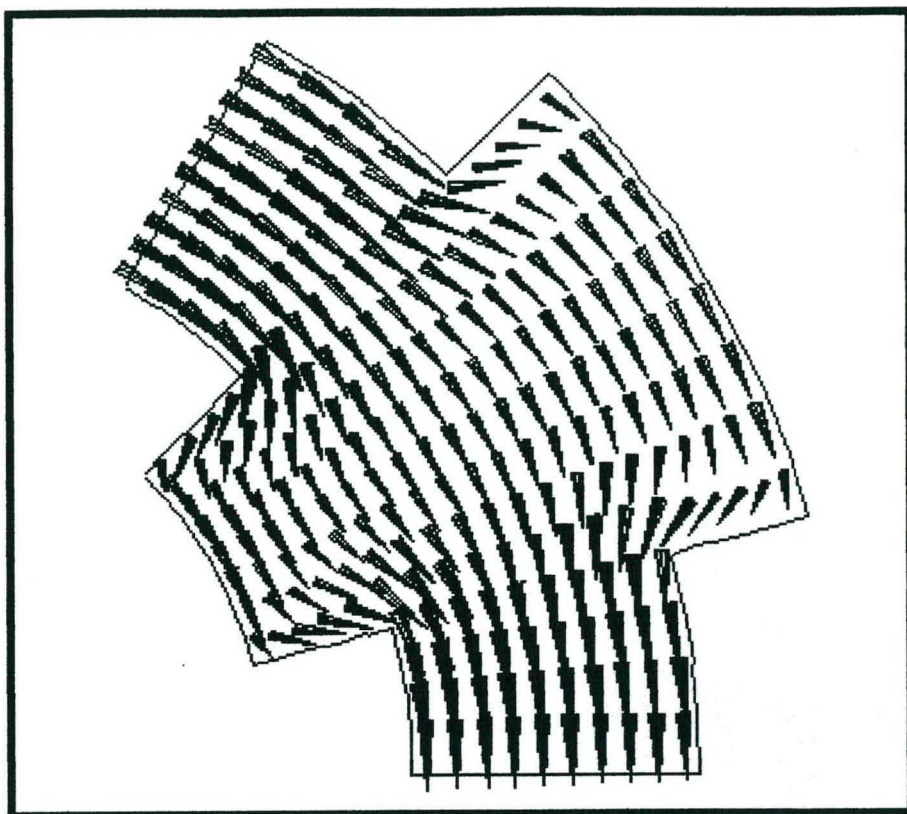


Fig. 6.30 Estrutura magnética.



*Fig. 6.31 Vetores densidade de corrente.*

A continuidade da corrente de magnetização é calculada e testada através da lei de Âmpere:

$$I = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{L} \quad (6.14)$$

onde a integração é realizada dentro de um caminho fechado  $L$ .

As integrações são feitas ao redor das regiões 1, 2 e 3 (demonstradas pelas linhas pontilhadas na Fig. 6.30). Devido a continuidade da corrente, o valor final das integrais nas três regiões deve ser o mesmo. A Tabela 6.3 apresenta os valores de corrente obtidos através das integrações realizadas nas três regiões.



<i>Ângulo</i>	<i>Corrente (A)</i>
9 <sup>0</sup>	9.90
30 <sup>0</sup>	9.94
51 <sup>0</sup>	9.91

*Tabela 6.3 - Valores de corrente.*

Nota-se através dos resultados apresentados na Tabela 6.3 que os valores de corrente obtidos apresentam uma boa concordância. As pequenas diferenças entre os resultados são devidos principalmente a malha. É interessante ressaltar também neste caso a distribuição consistente dos vetores densidade de corrente na bobina (Fig. 6.31). Portanto, os resultados gráfico e numéricos demonstram a efetividade do método proposto em relação a continuidade da corrente de magnetização.

## 6.8 SEÇÃO DE UM DISPOSITIVO ELETROMAGNÉTICO

O objetivo deste exemplo é demonstrar que, através do método proposto, pode-se utilizar a densidade de corrente imposta na bobina como fonte de excitação. A estrutura mostrada na Fig. 6.32 é um setor de um dispositivo eletromagnético apresentando um entreferro onde encontram-se os pontos **A** e **B**. Este dispositivo apresenta um enrolamento disposto em duas ranhuras, sendo que a disposição da interconexão (“cabeça” de bobina) é mostrado na parte inferior da Fig. 6.32.

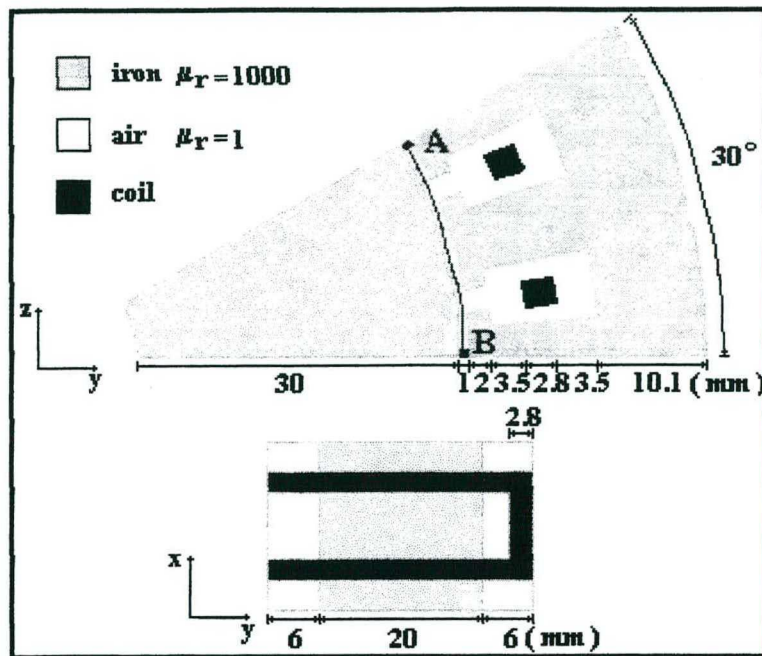


Fig. 6.32 Setor de um dispositivo eletromagnético.

Como visto no capítulo 3, as fontes de excitação de campo são as diferenças de potenciais aplicadas nas bobinas como condições de fronteira. Contudo, o método também permite que se possa utilizar a densidade de corrente imposta na bobina como fonte de excitação. Por exemplo, aplicando-se a diferença de potencial de  $17.3V$  apresentada na Fig. 6.33, obtém-se através da solução numérica da equação

$$\nabla \cdot \nabla V = 0 \quad (6.15)$$

o seguinte vetor densidade de corrente num elemento da bobina (lembrando que  $\vec{E} = -\nabla V$  e  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ):

$$\vec{J} = 1.458 \times 10^{10} \vec{i} + 0.00204 \vec{j} + 0.00360 \vec{k} \quad (6.16)$$

cujo módulo é dado por:

$$|\vec{J}| = \sqrt{(1.458 \times 10^{10})^2 + (0.00204)^2 + (0.00360)^2} = 1.458 \times 10^{10} \quad (6.17)$$



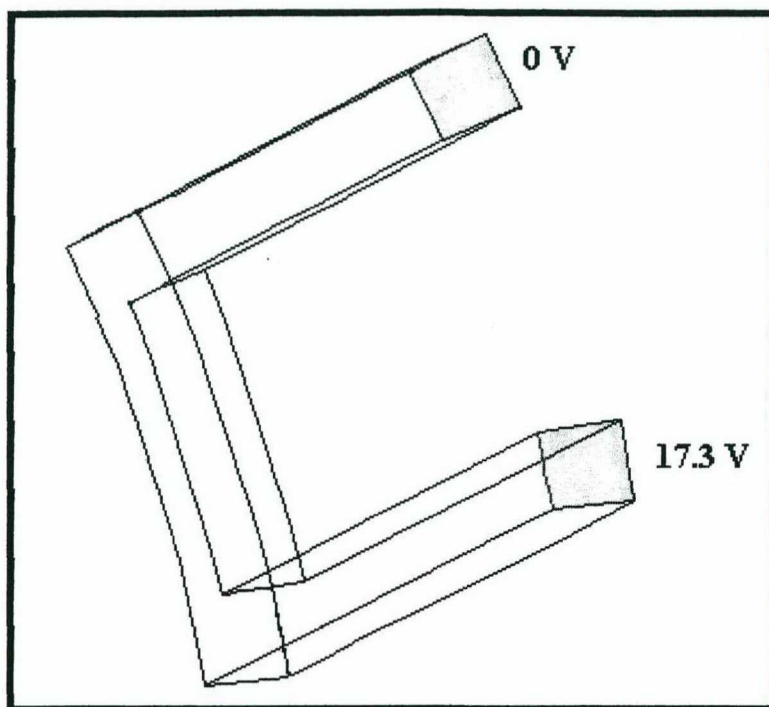


Fig. 6.33 Condições de fronteira na bobina.

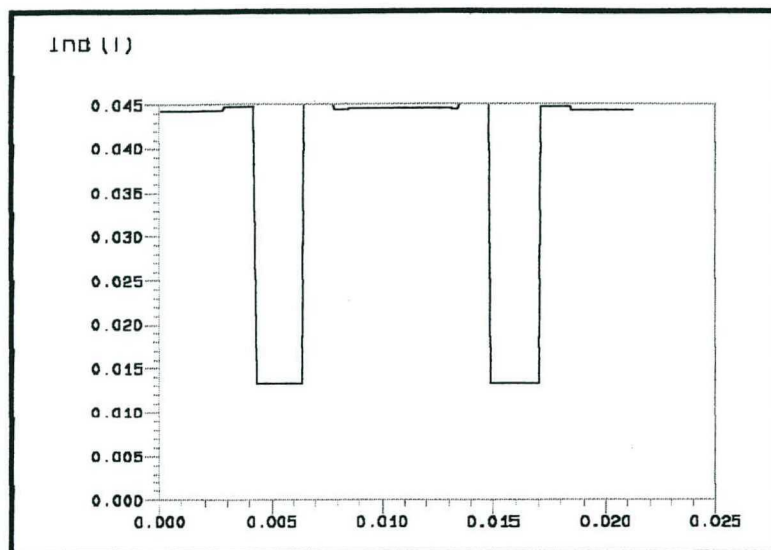
Dividindo (6.16) por (6.17), obtém-se um vetor unitário na direção do vetor  $\vec{J}$ :

$$\frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} = 1\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k} \quad (6.18)$$

Neste momento têm-se a liberdade de se impor o módulo da densidade de corrente desejada no elemento. Para este exemplo impõe-se a densidade de corrente de  $10 \text{ A/mm}^2$ . Portanto, o vetor densidade de corrente para o elemento torna-se:

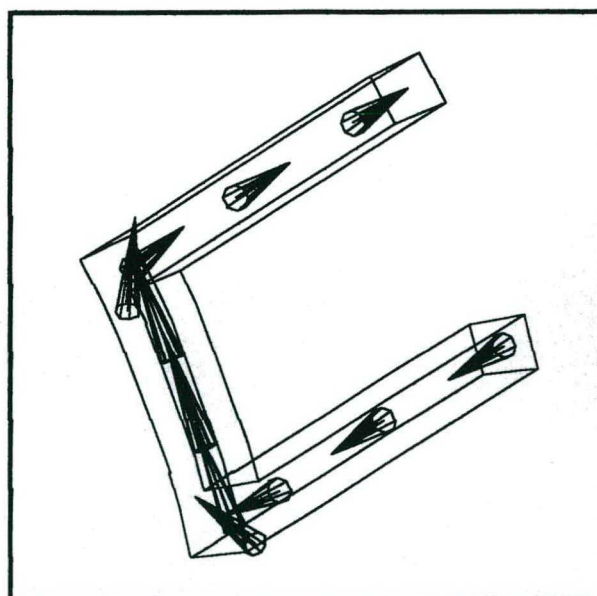
$$\vec{J} = 10\vec{i} - 0\vec{j} - 0\vec{k} \quad (6.19)$$

O mesmo procedimento é realizado em todos os elementos da bobina. Na Fig. 6.34 têm-se os valores de indução magnética calculados na curva entre os pontos A e B.



*Fig. 6.34 Induções magnética na curva entre A e B.*

A Fig. 6.35 apresenta os vetores representando as densidades de corrente na bobina.



*Fig. 6.35 Vetores densidade de corrente.*

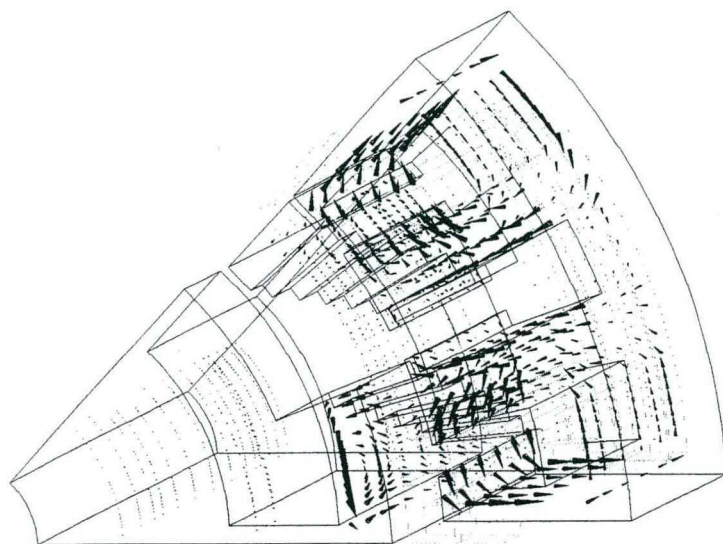
## 6.9 ALTERNADOR SÍNCRONO

O objetivo deste exemplo é demonstrar a efetividade da aproximação proposta através de um dispositivo magnético real, o alternador síncrono com polos do tipo “garra”. Somente um sistema de cálculo de campo tridimensional é capaz de simular esta máquina, devido a geometria das “garras” e da pequena relação entre o comprimento axial e o diâmetro do estator.

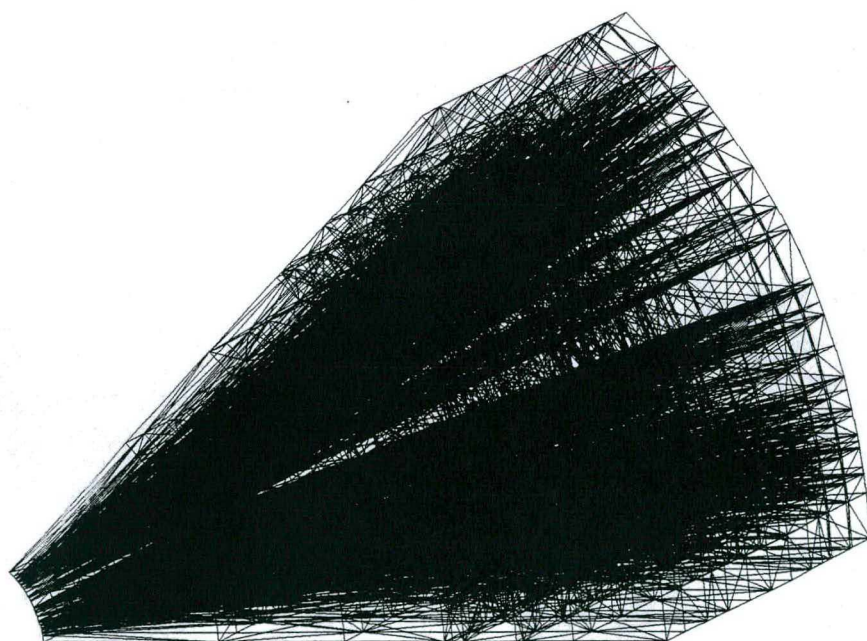
Este tipo de dispositivo é caracterizado por um circuito magnético variável dependendo da posição relativa entre rotor e estator. Devido ao método proposto neste trabalho ser para magnetostática, não serão levados em consideração, na simulação da máquina, as correntes de Foucault que se desenvolvem nos polos do rotor e nas lâminas do estator.

O cálculo das indutâncias  $L_d$  e  $L_q$  são realizados através da construção de dois modelos. Estes modelos são obtidos através do posicionamento do rotor (sem corrente no enrolamento de campo) segundo os dois eixos. Na obtenção dos resultados, numéricos e experimentais, considerou-se que duas fases do estator estão em série e são alimentadas por uma corrente constante [41].

A máquina síncrona possui um plano de simetria geométrico e eletromagnético, portanto o domínio de cálculo pode ser simplificado para um polo. A Fig. 6.36 apresenta o domínio de estudo e a correspondente distribuição de fluxo quando o rotor está na posição de quadratura. A condição de fronteira  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  foi imposta na fronteira do domínio de estudo. A Fig. 6.37 mostra a malha utilizada neste caso. A Tabela 6.4 apresenta os resultados, numéricos e experimentais, para as indutâncias  $L_d$  e  $L_q$ .



*Fig. 6.36 Distribuição do fluxo quando o rotor está na posição de quadratura.*



*Fig. 6.37 Malha (19530 elementos - 21000 incógnitas).*

<i>Indutância</i>	<i>Numérica</i>	<i>Medida</i>
<i>L<sub>d</sub> (mH)</i>	1.149	1.167
<i>L<sub>q</sub> (mH)</i>	0.630	0.671

Tabela 6.4 - Indutâncias.

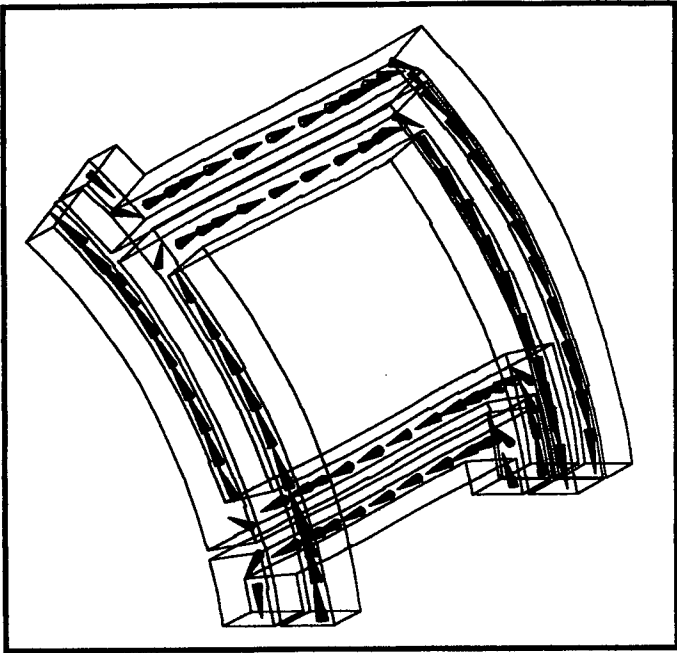
As reatâncias  $X_d$  e  $X_q$  segundo os dois eixos para uma frequência de 60 Hz é apresentado na Tabela 6.5.

<i>Reatância</i>	<i>Numérica</i>
<i>X<sub>d</sub> (Ohms)</i>	0.433
<i>X<sub>q</sub> (Ohms)</i>	0.237

Tabela 6.5 - Reatâncias.

Devido a sua construção, os efeitos das “cabeças” de bobinas neste tipo de dispositivo são bastantes pronunciados. A Fig. 6.38 mostra as direções dos vetores representando a corrente em duas fases conectadas em série, incluindo as “cabeças” de bobinas. A resistência das fases em série é de  $3\Omega$ , e a corrente utilizada no ensaio e na simulação é de  $5A$ .





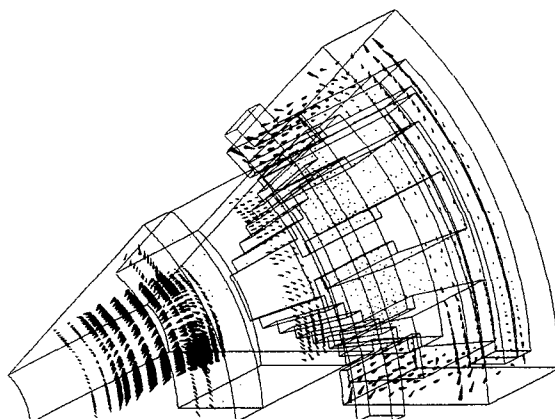
*Fig.6.38 Vetores densidade de corrente.*

A tensão estabelecida em uma fase do estator a vazio é calculada utilizando o valor do fluxo máximo (equação 4.8), quando somente o enrolamento de campo do rotor é alimentado. Assumindo uma distribuição de fluxo senoidal, os valores de tensão, medidos e calculados, são apresentados na Tabela 6.6. O número de espiras da bobina do rotor é 540.

<i>Tensão</i>	<i>Numérica</i>	<i>Medida</i>
<i>fem(V)</i>	8.21	8.85

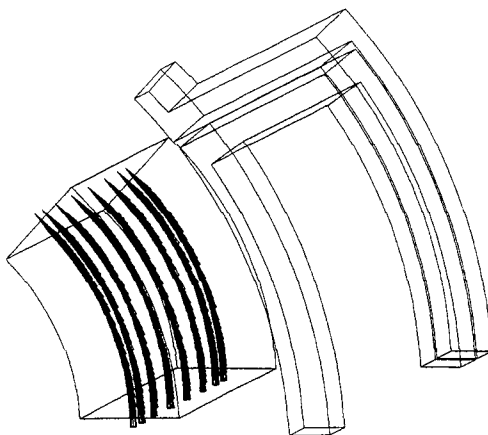
*Tabela 6.6 - Tensões.*

A Fig. 6.39 apresenta o domínio de estudo e a correspondente distribuição de fluxo segundo o eixo direto nesta simulação. Com relação as condições de contorno para este caso, tem-se a condição  $\vec{H} \times \vec{n} = \mathbf{0}$  nas faces laterais e a condição  $\vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  nas outras faces.



*Fig. 6.39 Distribuição do fluxo segundo o eixo direto.*

Na Fig. 6.40 é apresentado a distribuição dos vetores representando as densidades de corrente na bobina do rotor, juntamente com a fase do estator onde foi calculada a tensão.



*Fig. 6.40 Distribuição da densidade de corrente na bobina do rotor.*

Neste exemplo, os resultados obtidos experimentalmente foram comparados aos obtidos na simulação. Pode-se verificar a boa concordância entre os resultados, o que valida a formulação e os procedimentos informáticos implementados. A distribuição consistente dos vetores densidade de corrente nas bobinas do rotor e estator, condição necessária para convergência numérica, demonstra a efetividade da técnica proposta. É interessante ressaltar também, os bons resultados obtidos pelo programa com um grande número de incógnitas (21000 - eixo direto). O número de iterações do método ICCG para este caso foi 615.

## 6.10 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentados os resultados obtidos com o pacote computacional desenvolvido durante a elaboração deste trabalho.

Várias estruturas eletromagnéticas foram modeladas. Nos três exemplos iniciais, foram realizadas comparações entre os programas **FEET**, **FEECAD** e **EFCAD**. Através da concordância dos resultados obtidos, pode-se concluir que as ferramentas computacionais implementadas apresentaram resultados satisfatórios. No caso do contator, outros fenômenos foram modelados de maneira satisfatória como a força e as correntes induzidas. Neste caso, comprovou-se que a formulação desenvolvida por Fujiwara et al [39] também apresenta bons resultados com elementos tetraédricos.

Uma verificação colocando em evidência a continuidade da corrente de magnetização através do método proposto neste trabalho, foi feita em uma estrutura apresentando uma bobina com diferentes seções transversais. Em outro caso, evidenciou-se que a densidade de corrente imposta pode ser colocada como fonte de excitação.

Finalmente, aplicação deste método em uma máquina relativamente complexa como o alternador síncrono com polos do tipo “garra”, levando em conta a



influência das “cabeças de bobinas”, demonstra sua eficiência, verificada pela boa consistência entre os resultados calculados e medidos.

## CONCLUSÕES FINAIS

A comprovação das teorias expostas nos capítulos anteriores só foi possível através do desenvolvimento de um ambiente informático essencialmente direcionado para o método dos elementos finitos, o que é o caso do programa **FEET**, suporte lógico para este trabalho. Este programa utiliza integralmente a base de elementos finitos tradicionais (bases de dados e funções de forma), apenas se acrescentam as funções de forma vetoriais e suas respectivas direções para utilização de elementos de aresta. Para representação tridimensional das estruturas magnéticas optou-se pela utilização de elementos tetraédricos, devido a sua maior adaptabilidade à geometrias de forma qualquer. É claro que um malhador genérico 3D será o pré-processador mais adequado para o sistema **FEET**, pois as irregularidades geométricas podem ser melhor tratadas com os elementos tetraédricos.

Inicialmente, apresentou-se alguns conceitos fundamentais utilizados na solução de problemas estáticos e quase-estáticos pelo método dos elementos finitos. Em seguida, os elementos de aresta tetraédricos, utilizados na discretização do domínio de estudo, foram apresentados. Através da utilização destes elementos evitam-se certas dificuldades como: perdas de precisão devido aos erros de cancelamento em regiões ferromagnéticas, modos espúrios, imposições de calibres, etc.

Para assegurar a continuidade tangencial do potencial vetor (elétrico e magnético) na malha de elementos finitos se fez necessário introduzir um conceito de direcionamento de arestas. A eficácia deste conceito foi comprovada através dos resultados gráficos e numéricos apresentados no capítulo seis.

Apresentou-se também, neste trabalho, a metodologia utilizada no desenvolvimento de uma técnica para promover a continuidade da corrente de magnetização. A técnica é baseada nos potenciais vetores elétrico e magnético com elementos de aresta e no potencial escalar elétrico com elementos nodais.

As experiências numéricas realizadas permitem que sejam feitas as seguintes conclusões com relação a técnica:

- pode ser usada na análise dos efeitos das “cabeças” de bobinas;
- pode ser utilizada para alimentação das bobinas com corrente;
- permite alimentação de várias bobinas na estrutura a ser simulada;
- a imposição de calibres é desnecessária;
- permite encontrar uma distribuição consistente do vetor densidade de corrente na bobina, condição necessária para convergência numérica.
- permite a presença de bobinas dispostas em quaisquer direções em relação aos eixos ordenados.

Diferentes estruturas eletromagnéticas, com graus variáveis de dificuldade de modelagem, foram escolhidas para testar a viabilidade e comprovar a eficácia das técnicas de modelagem desenvolvidas.

Vários fenômenos eletromagnéticos presentes em dispositivos de conversão de energia foram explorados: saturação magnética, correntes induzidas, forças e continuidade da corrente.

A validação dos meios de cálculo foi efetuada, sempre que possível, através da confrontação com resultados experimentais. Os resultados assim obtidos permitem que se conclua favoravelmente acerca dos procedimentos de simulação propostos, formulados e desenvolvidos ao longo deste trabalho.

Com o objetivo de dar continuidade ao trabalho, são propostas as seguintes aplicações:

-Das condições de fronteira periódicas e anti-periódicas na análise de campos magnéticos tridimensionais por elementos de aresta. A aplicação destas condições de fronteira pode reduzir o tamanho do problema e o tempo de processamento [1].

-Da técnica da banda de movimento [42]. Através de sua utilização consegue-se, por exemplo, obter o movimento do rotor da máquina. O movimento é levado em conta na malha de discretização por intermédio de elementos particulares situados no entreferro e que efetuam adequadamente a conexão geométrica das partes fixas e móvel, durante o processo de cálculo.

-De uma técnica que permita o acoplamento das equações de circuitos externos de alimentação com as equações de campo. As características dos dispositivos eletromagnéticos alimentados por conversores estáticos podem ser obtidas através da resolução simultânea das equações de campo e circuitos [43].

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [01] IDA, N. & BASTOS, J. P. A. "Electromagnetics and Calculation of Fields". Springer-Verlag, Second. Edition, New York, 1997
- [02] SILVESTER, P. "Campos Eletromagnéticos Modernos". Editora Polígono, 1971.
- [03] BECKER, E. B. & CAREY, G. F. & ODEN, J. T. "Finite Elements: an Introduction". Vol. 1 in Texas Finite Elements Series, Englewood Cliffs (New Jersey-USA), Printice Hall, 1981.
- [04] STRANG, G. & FIX, O. J. "An Analysis of the Finite Element Method". Printice-Hall, 1983.
- [05] MESQUITA, R. C. "Calculo de Campos Tridimensionais usando Elementos Finitos: Magnetoestática, Quase-estática e Aquecimento Indutivo". Tese de Doutorado, UFSC, 1990.
- [06] BOSSAVIT, A. "Whitney Forms: a Class of Finite Elements for Three-Dimensional Computations in Electromagnetism". IEEE Trans. on Magn., Vol. 135, N0. 8, pp. 493-499, november, 1988.
- [07] WEBB, J. P. "Edge Elements and What They Can for You". IEEE Trans. on Magn., Vol. 29, N0. 2, pp. 1460-1464, march, 1993.
- [08] MUR, G. "Edge Elements, their Advantages and their Disavantages". IEEE Trans. on Magn., Vol. 30, N0. 5, pp. 355-359, september, 1994.
- [09] ALBANESE, R. & RUBINACCI, B. 'Magnetostatic Field Computations in Terms of Two-component Vector Potential". Int. Journal of Numerical Methods in Eng., Vol. 29, pp. 515-532, 1990

- [10] GOLIAS, N. A. & TDBOUKIS, T. D. "Magnetostatics with Edge Elements: A Numerical Investigation in the Choice of the Tree". IEEE Trans. on Magn., Vol. 30, N0. 5, pp. 2877-2880, september, 1994.
- [11] PREIS, K. & BARDI, I. & BIRO, O. "Different Finite Element Formulations of 3D Magnetostatic Fields", IEEE Trans on Magn., Vol. 28, N0. 2, pp. 1056-1059, march, 1992.
- [12] WEBB, J. P. & FORGHANI, B. "A Single Scalar Potential Method for 3D Magnetostatics Using Edge Elements". IEEE Trans. on Magn., Vol. 25, N0. 5, pp. 4124-4128, september, 1995.
- [13] CENDES, Z. S. "Vector Finite Elements for Electromagnetic Field Computations". IEEE Trans on Magn., Vol. 27, N0. 5, pp. 3958-3966, september, 1991.
- [14] BASTOS, J. P. "Notas de Aula da Disciplina Tópicos Especiais em Eletromagnetismo". Florianópolis, UFSC, 1995.
- [15] NEDELEC, J. C. "Mixed Finite Elements in  $R^3$ ". Numer. Mathematic, 35, pp.315-341, 1980.
- [16] DESCHAMPS, G. A. "Eletromagnetics and Differential Forms". Proceedings of the IEEE, Vol. 69, N0. 6, pp. 676-696, june, 1981.
- [17] MUR G. & HOOP, A. T. "A Finite-Element Method for Computing Three-Dimensional Electromagnetic Fields in Homogeneous Media". IEEE Trans. on Magn., Vol. 21, N0. 6, pp. 2188-2191, november, 1985.
- [18] REEP, Z. & VÉRITÉ, J. C. "Application of a New Edge Element for 3D-Eddy Currents Computation". BISEF, 1988.

- [19] PINCHUK, A. R. & CROWLEY, C. W. & SILVESTER, P. P. 'Spurious Solutions to Vector Diffusion and Wave Field Problems'. IEEE Trans. on Magn., Vol. 24, NO. 1, pp. 158-161, january, 1988.
- [20] BOSSAVIT, A. "Edge Elements for Magnetostatics". Int. J. of Numerical Modelling, Vol. 9, pp. 19-34, 1996.
- [21] DHATT, G. & TOUZOT, G. 'The Finite Element Method Displayed'. New York, John Wiley and Sons, 1985.
- [22] CROWLEY, C. W. & SILVESTER, P. P. "Covariant Projection Elements for 3D Vector Fields Problems". IEEE Trans. on Magn., Vol. 24, NO. 1, pp. 397-400, january, 1988.
- [23] KAMEARY, A. "Calculation of Transient 3D Eddy Current using Edge Elements". IEEE Trans. On Magn., Vol.26, NO. 2, pp. 466-499, march, 1990.
- [24] WELIJ, J. "Calculation of Eddy Currents of H on Hexahedra". IEEE Trans. on Magn., Vol. 21, NO. 6, pp. 2239-2241, november, 1985.
- [25] MUR, G. & HOOP, T. "A Finite Method for Computing Three-Dimensional Electromagnetic Field Computation". IEEE Trans. on Magn., Vol. 21, NO. 6, pp. 2188-2191, november, 1985.
- [26] BARTON, M. L. & CENDES, Z. J. "New Vector Finite Elements for the Three Dimensional Magnetic Field Computation". J. Appl. Phys., Vol.61, NO. 8, pp. 3919-3921, 1987.
- [27] WHITNEY, H. "Geometric Integration Theory". Princeton U. P., 1957.

- [28] BOSSAVIT, A. & VÈRITÉ, J. C. “A Mixed FEM-BIEM Method to Solve 3-D Eddy Current Problem”. IEEE Trans. on Magn., Vol. 18, pp.431-435, 1982.
- [29] ABDELAZIZ, E. “Permanent Magnet Synchronous Machines”. Thèse of the Doctorate, École Polytechnique Fédérale de Lousane, 1983.
- [30] BARAKAT, G. “Étude et Modélisation Tridimensionnelle d’une Machine Synchrone à Griffes”. J. Phys., Vol. 5, pp. 1991-2002, december, 1985.
- [31] HENNEBERG, G. & KÜPPERS, S. “Improvement of the Output Performance of Claw-Pole Alternators by Additional Permanent Magnets”. ICEM, pp. 472-476, 1994
- [32] BLOCK, R. & HENNEBERG, G. “Numerical Calculation and Simulation of Claw-Pole Alternator”. ICEM, pp. 127-131, 1992.
- [33] PINHO, A. C. “Simulação de Dispositivos Eletromagnéticos pela Resolução Simultânea das Equações do Campo Eletromagnético em 3D com as Equações dos Circuitos de Alimentação, Exame de Qualificação, UFSC, 1997.
- [34] FUJIWARA, K. & NAKATA, T. & TAKAHASHI, N. & OHASHI, H. “On the Continuity of the Magnetizing Current Density in 3-D Analysis with Edge Element”. IEEE Trans. on Magn., Vol. 31 ,N0. 3, pp.1364-1367, 1995.
- [35] SADOWISK, N. & CARLSON, R. & KUO-PEN, P. “Influência das Correntes Induzidas nos Enrolamentos de Excitação de Dispositivos Eletromagnéticos”. CBMAG 95, pp.84-86, 1995.



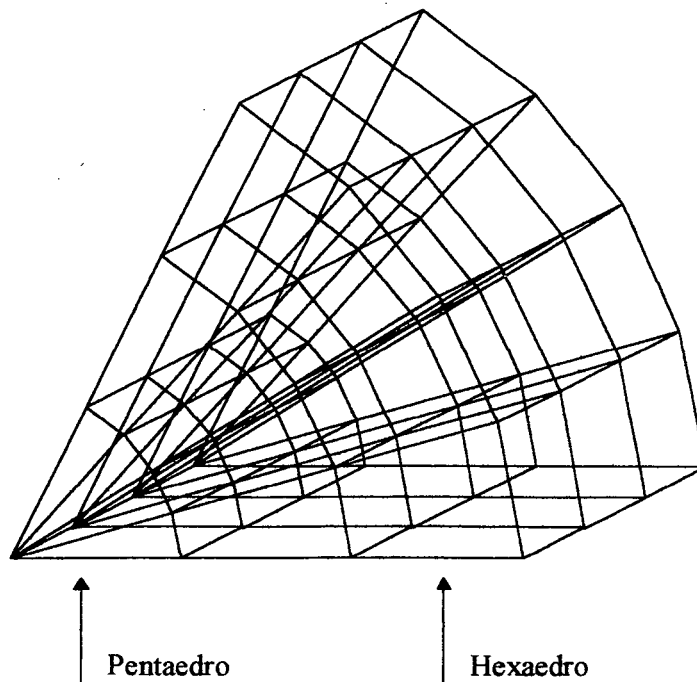
- [36] BANDELIER, B & RIOUX-DAMIDAU, F. “Variables D’Aretes et Variables Nodales dans la Modelisation des Champs Magnetiques”. *Revue de Physique Appliquee*”, N0. 9122, november, 1989
- [37] FUJIWARA, K. & NAKATA, T. & TAKAHASHI, N. & OKADA, Y “Improvements of the  $T - \Omega$  Method for 3D Eddy Current Analysis”. *IEEE Trans. on Magn.*, Vol. 31,N0. 3, pp. 1364-1367, may, 1995
- [38] FUJIWARA, K. “ 3D Magnetic Field Computation Using Edge Element”. *IGTE Symposion, Graz - Austria*, pp. 185-212, september, 1992
- [39] REN, Z. “Influence of the R.H.S. on the Convergence Behaviour of the Cur-Curl equation”. *IEEE Trans. on Magn.*, Vol. 32,N0. 3, pp. 655-658, may, 1996
- [40] REN, Z. “Auto-gauging of Vector Potential by Iterative Solver”. *International Workshop on Electric and Magnetic Fields, Belgium-Liege*, may, 1996
- [41] JONES, C. V. “The Unified theory of Electrical Machines”. *Butterworths, London*, 1957
- [42] SADOWSKI, N. “Modélisation des Machines Électriques à Partir de la Résolution des Equations du Champ en Tenant Compte du Mouvement et du Circuit D’Alimentation (Logiciel EFCAD)”. *Thèse de Docteur de l’INPT, Toulouse*, 1993.
- [43] PINHO A. C. & BASTOS, J. P. A & SADOWSKI N. “Acoplamento das Equações do Campo Eletromagnético e Circuitos Elétrico em 3D”. *CBMAG*, novembro, 1996.

- [44] AIRTON J. A. & BASTOS, J. P. A & SADOWSKI N. "A Voltage Fed Edge Element Method for Magnetostatics". CEFC, pp. 160, june, 1998.
- [45] AIRTON J. A. & BASTOS, J. P. A & SADOWSKI N. "Alimentação em Tensão com Acoplamento entre Elementos Nodais e de Aresta para Magnetostática". CBMAG, pp. 198-202, outubro, 1998.
- [46] AIRTON J. A. & BASTOS, J. P. A & SADOWSKI N. "Implementação de um Conceito de Direcionamento de Arestas num Sistema de Cálculo 3D com Elementos de Aresta". CBMAG, pp. 270-274, outubro, 1998.

## ANEXO

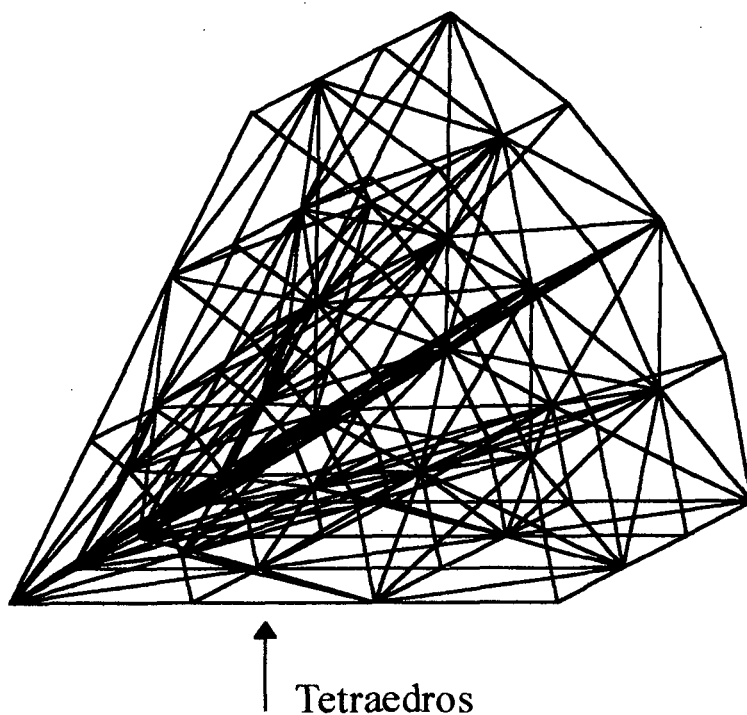
### MALHA COM ELEMENTOS BASE

A Fig. A.1 apresenta uma malha subdividida com os elementos base (hexaedro e pentaedro). Na construção da malha de elementos finitos, inicialmente, o domínio de estudo é subdividido com os elementos base.



*Fig. A1 Subdivisão da malha em hexaedros e pentaedros.*

Em seguida, cada elemento base (hexaedro ou pentaedro) é subdividido em elementos tetraédricos. Os elementos base, hexaedro e pentaedro, são subdivididos em cinco e três tetraedros respectivamente.



*Fig. A2 Elementos base subdivididos em tetraedros.*